

XXII



Comunidad de Madrid

Edita: Asociación Matemática Concurso de Primavera

ISBN: 978-84-608-5881-2

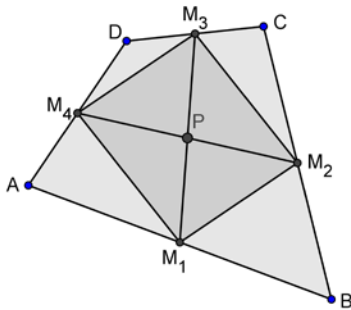
Depósito Legal: M-8301-2017

Comité organizador del Concurso de Primavera

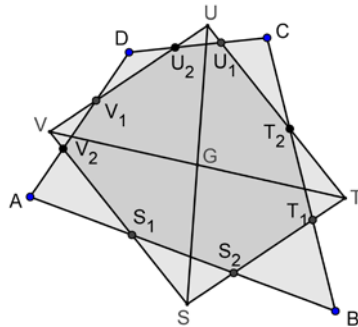
*Alfredo Martínez Sanz
Esteban Serrano Marugán
Francisco López Álvarez
Hugo Fernández Hervás
Isabel Benito Miguel
Javier Soler Areta
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
Jorge González Ortega
José María Sordo Juanena*

*Juan Jesús Donaire Moreno
Luis Ferrero de Pablo
Marco Castrillón López
María Gaspar Alonso-Vega,
María Moreno Warleta
Merche Sánchez Benito
Miguel Ángel Baeza Alba
Pablo Martínez Dalmau
Roberto Tomé Grasa
Víctor Manuel Sánchez González*

Paralelogramo de Varignon



Paralelogramo de Wittenbauer



Paralelogramo de Varignon: Si unimos mediante segmentos (en orden circular) los puntos medios de los lados de un cuadrilátero convexo $ABCD$, obtenemos un paralelogramo, cuyo centro P es centro de pesos de los vértices.

Paralelogramo de Wittenbauer:

Si en un cuadrilátero convexo, $ABCD$, dibujamos los puntos tercios de los lados, y unimos mediante rectas los puntos tercios más próximos a un vértice de los lados que en él concurren, aquellas definen un paralelogramo, cuyo centro G es centro de gravedad del cuadrilátero de partida.

Presentación

- ¡Si nos encuentran estamos perdidos!
- ¿Cómo vamos a estar perdidos si nos encuentran?
(Diálogo de los hermanos Marx en Sopa de ganso)

Si no nos encontramos, estamos perdidos.

El Comité Organizador

AGRADECIMIENTOS

A los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores.

A los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase.

A la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

A la Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

A Smartick.

ÍNDICE

ENUNCIADOS DE LA 1ª FASE

Nivel I (5º y 6º de Primaria).....	9
Nivel II (1º y 2º de ESO).....	14
Nivel III (3º y 4º de ESO).....	20
Nivel IV (1º y 2º de Bachillerato).....	25

ENUNCIADOS DE LA 2ª FASE

Nivel I (5º y 6º de Primaria).....	30
Nivel II (1º y 2º de ESO).....	35
Nivel III (3º y 4º de ESO).....	40
Nivel IV (1º y 2º de Bachillerato).....	45
Tabla de soluciones 1ª Fase.....	50
Tabla de soluciones 2ª Fase.....	51

SOLUCIONES

Soluciones 1ª Fase Nivel I.....	52
Soluciones 1ª Fase Nivel II.....	57
Soluciones 1ª Fase Nivel III.....	61
Soluciones 1ª Fase Nivel IV.....	66
Soluciones 2ª Fase Nivel I.....	73
Soluciones 2ª Fase Nivel II.....	78
Soluciones 2ª Fase Nivel III.....	83
Soluciones 2ª Fase Nivel IV.....	90
Participantes y relación de ganadores del XXI Concurso de Primavera.....	96
XXXV Concurso “Puig Adam” de Resolución de Problemas.....	99
XVII Concurso Intercentros.....	105
LIV Olimpiada Matemática Española. Fase Cero.....	112
LIV Olimpiada Matemática Comunidad de Madrid.....	117
LIV Olimpiada Matemática Española.....	119
XXIII Olimpiada de Mayo Primer Nivel.....	120
XXIII Olimpiada de Mayo Segundo Nivel.....	121
Relación de ganadores en la XXIII Olimpiada de Mayo 2017.....	122



**XXI CONCURSO DE PRIMAVERA
DE MATEMÁTICAS**

1ª FASE: 22 de febrero de 2017

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS**.

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta que dejes en blanco</i>	1 punto
<i>Cada respuesta errónea</i>	0 puntos

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

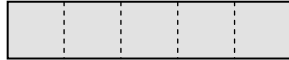
ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

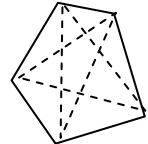
- 1** ¿Con cuál de estas operaciones se obtiene el número mayor?
A) $1,3 \times 1,3$ **B)** $2 - 0,32$ **C)** $3,3 \div 2$ **D)** $0,69 + 1,01$ **E)** $2,8 \times 0,6$
- 2** Un rectángulo está formado por cinco cuadrados como se muestra en la figura.



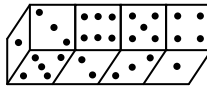
- Si el perímetro de un cuadrado mide 12 cm, ¿cuál es el área del rectángulo?
A) 36 cm^2 **B)** 45 cm^2 **C)** 90 cm^2 **D)** 18 cm^2 **E)** 54 cm^2
- 3** Manuela ha estado tres cuartos de hora delante de la tele para ver un capítulo completo de Bob Esponja. Si el capítulo duraba 38 minutos, ¿cuántos minutos de anuncios han puesto?
A) 4 **B)** 12 **C)** 9 **D)** 7 **E)** 22



- 4** En un pentágono puedes trazar cinco diagonales, como ves en la figura. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un decágono regular? Por si no lo sabes, un decágono es un polígono de diez lados.
A) 10 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 35 **E)** 40



- 5** ¿Cuánto suman los puntos de las caras que no ves en el dibujo?



- A)** 54 **B)** 45 **C)** 21 **D)** 14 **E)** 35
- 6** Irene y Rafa tienen un ovillo de lana de 120 metros de largo. Van a hacer conjuntos de adornos que cada uno consta de un collar, una pulsera y un anillo. Para cada collar necesita 12 dm de lana, para cada pulsera 24,5 cm y para cada anillo 55 mm. ¿Cuántos conjuntos completos pueden hacer?
A) 4 **B)** 12 **C)** 80 **D)** 120 **E)** 22

- 7** Marta ha hecho un bonito póster con las tablas de multiplicar del 2 al 9: desde $2 \times 1 = 2$ hasta $9 \times 10 = 90$. En cuanto se ha despistado ha llegado Comenúmeros y ¡zas! se ha zampado absolutamente todos los unos que había en el póster. ¿Cuántos unos se ha comido el bribón?

3	x	6	=	8
3	x	7	=	2
3	x	8	=	2

- A)** 16 **B)** 20 **C)** 28 **D)** 36 **E)** 44

E) 21 cm

- 14** Para escribir los números del 1 al 14: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 se utilizan 19 cifras. Si empleamos exactamente 207 cifras, ¿cuál es el último número que escribiremos?

A) 105 B) 103 C) 94 D) 90 E) 88

- 15** Comenúmeros se ha comido uno de los números de esta serie. ¿Qué número es?

$$2 \rightarrow 5 \rightarrow 11 \rightarrow 23 \rightarrow 47 \rightarrow \text{🐞} \rightarrow 191$$

A) 101 B) 94 C) 70 D) 111 E) 95

- 16** Jesús tarda dos horas en pintar una pared de $4 \text{ m} \times 4 \text{ m}$. Para pintar una pared de $2 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ tardará...

A) 30 min B) 45 min C) 60 min D) 90 min E) 15 min

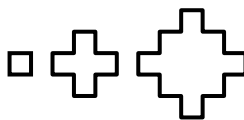
- 17** Ánder tiene diez años menos que Carlos. La suma de sus edades es 22 años. ¿Qué edad tiene Carlos?

A) 12 B) 6 C) 9 D) 18 E) 16

- 18** En una tienda de animales hay nueve hámsteres: dos hembras y siete machos. Ana cogió uno al azar y resultó ser un macho. ¿Qué probabilidad tiene ahora de sacar una hembra y llevarse una parejita?

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{8}$

- 19** Vemos los tres primeros polígonos crucigramas de una serie. Si el lado de esos polígonos mide 1 cm, ¿cuántos centímetros mide el perímetro del quinto polígono de la serie?



A) 20 B) 24 C) 28 D) 32 E) 36

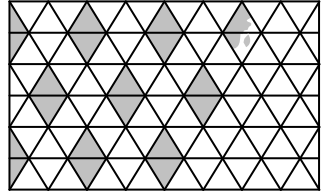
- 20** Don Retorcido se ha inventado este juego: Él te da un número. Si es par lo multiplicas por 2 y le sumas 1. Si es impar lo multiplicas por 3 y le sumas 1. Si después de aplicar la regla al número que te ha dado Don Retorcido y dos veces seguidas a cada uno de los números que vas obteniendo, llegas al 208, ¿qué número te dio Don Retorcido?

A) 20 B) 15 C) 12 D) 11 E) 9

21

Lucía está coloreando un bonito diseño con triángulos equiláteros en una cartulina. Observa el patrón. ¿Qué fracción de la cartulina estará coloreada de gris cuando termine?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{39}{100}$ C) $\frac{1}{2}$
 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{7}{10}$



22

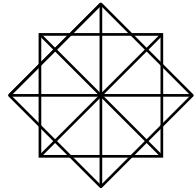
Lino, que no tenía caramelos, no para de pedirselos a Luca. ¡Ya no te doy más caramelos! dice Luca enfadado. Si te diera otro caramelo entonces tú comerías el doble de caramelos que yo. Si Luca ya le había dado trece caramelos a Lino ¿cuántos caramelos tenía al principio Luca?

- A) 30 B) 27 C) 26 D) 23 E) 21

23

¿Cuántos cuadrados se pueden encontrar en esta figura?

- A) 12 B) 10 C) 8 D) 15
 E) 9



24

Ramón sabe dar patadines, patadones y chutazos. Un patadón es el triple de fuerte que un patadín y la mitad de fuerte que un chutazo. Si con un chutazo la pelota recorre 120 metros, ¿cuántos metros recorrerá con un patadín?

- A) 12 B) 20 C) 30 D) 40 E) 60

25

El concurso llega a su fin. Para terminar..., ¿cuánto suman las cifras del número que al multiplicarlo por seis y después restarle 23 da como resultado 2017?

- A) 7 B) 10 C) 5 D) 11 E) 13



**XX CONCURSO DE PRIMAVERA
DE MATEMÁTICAS**

1ª FASE: 22 de febrero de 2017

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS**.

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta que dejes en blanco</i>	1 puntos
<i>Cada respuesta errónea</i>	0 puntos

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

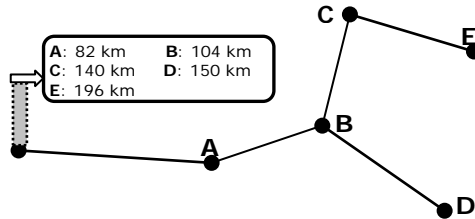
COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 El número 4385 está formado por cuatro cifras distintas que suman veinte. Si sumas el mayor y el menor número de cuatro cifras distintas que suman veinte, obtienes...

- A) 11 119 B) 11 116 C) 11 115 D) 11 114 E) 11 110

2 Aquí podéis ver el plano de carreteras de mi comarca con un cartel donde se indican las distancias kilométricas desde mi pueblo a los cinco más cercanos. ¿Cuántos kilómetros hay del pueblo **D** al **E** por carretera?



- A) 182 B) 346 C) 114 D) 92 E) 138

3 A Miriam le ha dado por investigar los números que puede formar usando exclusivamente las cifras 1 y 2: 1 – 2 – 11 – 12 – 21 – 22 – 111 – 112... (como ves, su lista ordenada ya tiene ocho números). Si los va ordenando de menor a mayor, ¿qué lugar ocupará el número 1121 en esa lista?

- A) 17 B) 14 C) 18 D) 15 E) 16

4 Julián ha comprado tres paquetes de folios a 2,35 euros cada uno y cinco carpetas. Ana compró un paquete de folios y tres carpetas. Ambos pagaron con un billete de 20 euros. Si a Julián le devolvieron 4,20 euros, ¿cuántos euros tienen que devolver a Ana?

- A) 15,20 B) 12,40 C) 14 D) 8,40 E) 16,20

5

- Don Retorcido, ¿tiene usted familia?
- Sí, somos varios hermanos y cada uno de nosotros tiene tantos hijos como hermanos. Ah, y en total somos más de 66 y menos de 99.

¿Cuántas personas forman la familia de don Retorcido?

- A) 76 B) 81 C) 75 D) 69 E) 94

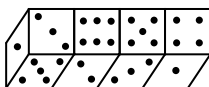
- 6** ¿Cuántos capicúas de tres cifras son múltiplos de 3?
 A) 24 B) 25 C) 27 D) 28 E) 30

- 7** Emma es una lectora muy disciplinada. Acaban de regalarle una novela de 210 páginas y hace la siguiente programación: “Todos los días leeré el mismo número de páginas salvo los viernes que leeré 5 páginas menos, los sábados no leeré y los domingos únicamente leeré 10 páginas”. De esta manera, Emma calcula que terminará su libro leyendo tres semanas completas. ¿Cuántas páginas leerá cada viernes?
 A) 7 B) 8 C) 10 D) 12 E) 13

- 8** Utilizando todas estas tarjetas, una sola vez cada una, tienes que formar cuatro números entre 13 y 53 de tal manera que no haya dos de ellos consecutivos. Si sumas el mayor y el menor de estos cuatro números, ¿qué cantidad obtienes?

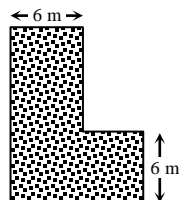


- A) 107 B) 73 C) 78 D) 76 E) 80
- 9** ¿Cuánto suman los puntos de las caras que no ves en el dibujo?



- A) 54 B) 45 C) 21 D) 14 E) 35

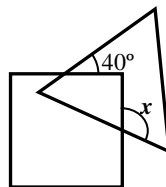
- 10** Como ves, Laura ha diseñado su jardín en forma de L y tiene una superficie de 120 m^2 . ¿Cuánto mide su perímetro?
 A) 52 m B) 60 m C) 48 m D) 80 m
 E) 56 m



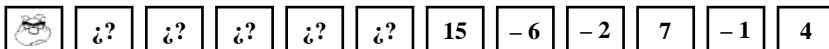
- 11** Solo una de estas operaciones da como resultado un número entero. ¿Cuál?
 A) $5 - 1:2$ B) $2,46 + 3,64$ C) $5 \cdot (1,2 - 2,4)$ D) $0,25 \cdot 42$ E) $\sqrt{9 + 81}$

- 12 En la figura vemos un triángulo equilátero y un cuadrado. ¿Cuánto mide el ángulo x ?

A) 120° B) 110° C) 100° D) 80°
E) 75°



- 13 ¡Qué extraño! Comenúmeros estaba hambriento y se ha encontrado con una serie muy interesante: cada número es la suma de los tres anteriores.



No se ha podido resistir y se ha comido los primeros números. Y ahí podemos verle en la casilla del último número que se zampó. ¿Cuál es ese número?

A) 64 B) -32 C) 82 D) 75 E) 71

- 14 Delia se ha inventado la operación **Delita** y ha elaborado la tabla de **Delitar** de los cinco primeros números.

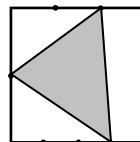
Como se aprecia, $1 \Delta 1 = 2$, $2 \Delta 5 = 4$ y $4 \Delta 2 = 5$.

Si tú también sabes **Delitar**, ¿cuál es el resultado de la operación $\{1 \Delta [(2 \Delta 3) \Delta 4]\} \Delta 5$?

Δ	1	2	3	4	5
1	2	1	4	5	3
2	1	3	2	5	4
3	4	2	1	3	5
4	5	5	3	5	2
5	3	4	5	2	4

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

- 15 Hemos dividido en dos partes iguales un lado de un cuadrado, otro lado en tres y un tercer lado en cuatro. Aprovechando algunas de estas divisiones formamos un triángulo como se aprecia en el dibujo. Si el área del cuadrado es de 144 cm^2 , ¿qué área, en cm^2 , tiene nuestro triángulo?



A) 96 B) 60 C) 48 D) 72 E) 51

- 16 Cuando Comenúmeros no tiene hambre juega con los números: escribe un número; si ese número es impar, le suma uno; y si el número es par, lo duplica y luego le resta uno. Esta mañana empezó por el 1 y va formando una bonita serie:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 15 \rightarrow 16 \rightarrow 31 \rightarrow \dots$$

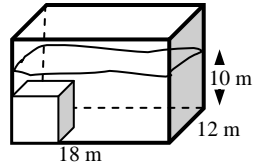
Solo uno de los siguientes números aparecerá en la serie de Comenúmeros. ¿Cuál?

A) 1019 B) 1020 C) 1021 D) 1022 E) 1023

17

Si introducimos un cubo de 6 m de arista en una piscina cuya base es un rectángulo de 18 m \times 12 m, el nivel del agua sube hasta los 10 m. ¿A qué altura llegará el agua si sacamos ese cubo de la piscina?

- A) 8 m B) 9 m C) 7 m D) 9,5 m
E) 8,5 m



18

El producto de tres números naturales distintos es 30. ¿Cuál de los siguientes resultados no puede ser su suma?

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

19

En una caja hemos metido las quince bolas numeradas (desde el 1 hasta el 15) de un billar americano. Si sacamos una bola al azar, ordena estos tres sucesos de menor a mayor probabilidad:

P = “que salga par o múltiplo de 5”

Q = “que salga impar”

R = “que salga múltiplo de 3 o que acabe en 0”

- A) RQP B) PRQ C) QRP D) QPR E) PQR

20

Sonia compone una serie de corcheas usando rayitas y aquí puedes ver las tres primeras. Anoche, cuando dibujó las 30 primeras, se fue a dormir agotada. ¿Cuántas rayitas necesitó Sonia para diseñar su última corchea?



- A) 184 B) 183 C) 182 D) 181 E) 180

21

¡Qué desastre!, estas cinco operaciones están mal resueltas. Pero, fíjate, todas ellas menos una pueden “arreglarse” sin más que añadir algún paréntesis. ¿Cuál es la operación que no se arregla ni con paréntesis?

- A) $2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 40$ B) $7 - 2 - 1 = 6$ C) $4 + 3 \cdot 2 = 14$
D) $-2 \cdot 3 - 5 = -4$ E) $4 \cdot 1 + 2 + 3 = 24$

22

¡Ya está Caracolito situado en el vértice de salida! Tiene un gran reto por delante: recorrer el perímetro de un polígono regular de 37 lados. ¿Preparado? ¿Listo? ¡Ya! Justo ahora, cuando se cumplen 18 días desde que empezó la prueba, Caracolito acaba de superar el 42% del total de su hazaña. ¿Cuántos lados completos ha recorrido Caracolito?



- A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

23

He dibujado un cuadrado en mi ordenador. Ha venido Sara y ha alargado los lados horizontales en un 20% y ha acortado los verticales en un 20%. Cuando lo ha visto Julia, ha acortado los lados horizontales en un 20% y ha alargado los verticales en un 20%. ¿Qué figura ha quedado al final?

- A) Un rectángulo con los lados horizontales mayores que los verticales
- B) Un cuadrado algo menor que el mío
- C) Un cuadrado igual al mío
- D) Un cuadrado algo mayor que el mío
- E) Un rectángulo con los lados horizontales menores que los verticales

24

Cuando Comenúmeros se come la cifra 3 del número 2358 se convierte en el 258. Esta mañana Comenúmeros se encontró con esta resta y se planteó así su desayuno: me comeré tres cifras de cada número para que el resultado de la resta sea el número positivo más pequeño posible.

$$\begin{array}{r} 795163 \\ - 496718 \\ \hline \end{array}$$

¿Cuánto suman las seis cifras que desayunó Comenúmeros?

- A) 30
- B) 31
- C) 32
- D) 33
- E) 34

25

Nuestro año, el 2017, cumple que $20 - 17 = 3$. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen esta propiedad: el número formado por sus dos primeras cifras menos el formado por sus dos últimas, es tres?

- A) 89
- B) 97
- C) 99
- D) 80
- E) 90



**XX CONCURSO DE PRIMAVERA
DE MATEMÁTICAS**

1ª FASE: 22 de febrero de 2017

NIVEL III (3º v 4º de E.S.O.)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS**.

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta que dejes en blanco</i>	1 puntos
<i>Cada respuesta errónea</i>	0 puntos

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

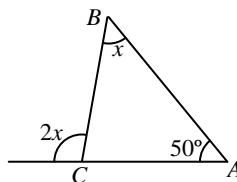
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

- 1 En la figura adjunta, x representa la medida del ángulo \widehat{CBA} .
¿Cuál es el valor de x ?

A) 60° B) 50° C) 45° D) 40°
E) 30°

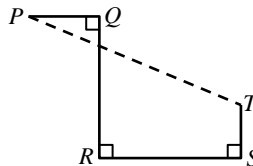


- 2 Si una recta de pendiente 2 pasa por los puntos $A(2, 7)$ y $B(a, 3a)$, ¿cuál es el valor de a ?

A) $\frac{5}{2}$ B) 10 C) 3 D) $\frac{11}{5}$ E) $\frac{12}{5}$

- 3 En la figura que ves, los ángulos en Q , R y S son rectos. Si $PQ=4$, $QR=RS=8$ y $ST=3$, la distancia de P a T es:

A) 16 B) $4\sqrt{10}$ C) $\sqrt{153}$ D) 14
E) 13



- 4 De las siguientes fracciones solamente hay una comprendida entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es?

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{5}{36}$ C) $\frac{5}{24}$ D) $\frac{5}{60}$ E) $\frac{5}{48}$

- 5 ¿Cuántos ceros tiene el número $N = 10^{100} \cdot 100^{10}$ si lo escribimos como un 1 seguido de ceros?

A) 120 B) 112 C) 200 D) 1000 E) 2000

- 6 ¿Cuál es la cifra de las decenas del menor entero positivo divisible entre 20, 16 y 2016?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

- 7 Tenemos tres enteros positivos que, si los sumamos por parejas, obtenemos los números 998, 1050 y 1234. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor de esos tres enteros?

A) 262 B) 248 C) 224 D) 250 E) 236

- 8** El rey y sus mensajeros viajan desde el castillo hacia el palacio de verano con una velocidad de 5 km/h. Cada hora, el rey envía un mensajero de vuelta al castillo. Si los mensajeros viajan con una velocidad de 10 km/h, ¿cuál es el intervalo de tiempo entre la llegada de dos mensajeros consecutivos al castillo?

A) 30 min B) 60 min C) 75 min D) 90 min E) 120 min

- 9** Había tres dígitos distintos en la pizarra, Pedro los sumó y obtuvo 15 como resultado. Luego borró uno de ellos y lo cambió por un 3. A continuación Laura multiplicó los tres dígitos distintos que había ahora y obtuvo como resultado 36. ¿Qué número borró Pedro?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

- 10** Si a y b son enteros tales que $4 < a < b < 22$ y la media de estos cuatro números, 4, a , b , 22 es 13, el número de posibles parejas (a, b) es:

A) 10 B) 8 C) 7 D) 9 E) 6

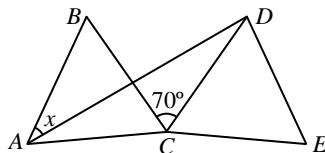
- 11** Si x e y satisfacen las igualdades $\frac{x-y}{x+y} = 9$, $\frac{x \cdot y}{x+y} = -60$, entonces

$(x+y)+(x-y)+xy$ es:

A) 210 B) -150 C) 14 160 D) -14 310 E) -50

- 12** Los triángulos ABC y CDE de la figura son equiláteros e iguales y $\widehat{BCD} = 70^\circ$. ¿Cuál es la medida, x , del ángulo $D\hat{A}B$?

A) 20° B) 25° C) 30°
D) 35° E) 40°

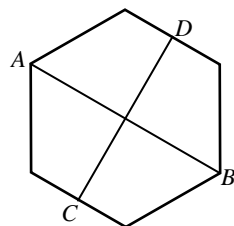


- 13** ¿Cuál de los siguientes números es el mayor?

A) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{17}$ B) $\sqrt{20} \cdot 17$ C) $20\sqrt{17}$ D) $\sqrt{201} \cdot 7$ E) $\sqrt{2017}$

- 14** En la figura se observa un hexágono regular en el que C y D son los puntos medios de dos lados opuestos. Si el área del hexágono es 60, el producto de las longitudes $AB \cdot CD$ es:

A) 100 B) 80 C) 60 D) $40\sqrt{3}$
E) $30\sqrt{3}$



- 15** En un examen de Matemáticas, si cada chico hubiera obtenido 3 puntos más de lo que obtuvo, la media de toda la clase, chicos y chicas, habría sido 1,2 puntos más de la que fue. ¿Qué porcentaje de chicas hay en la clase?

A) 20% B) 30% C) 40% D) 60% E) Es imposible saberlo

- 16** ¿Cuál es el menor número n tal que la suma $1 + 2 + 3 + \dots + n$ es mayor que 1000?

A) 43 B) 44 C) 45 D) 46 E) 47

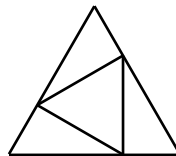
- 17** El mayor número de divisores de un número menor que 100 es:

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

- 18** En la figura vemos dos triángulos equiláteros, uno inscrito en el otro y con sus lados respectivamente perpendiculares. Si el pequeño tiene de lado 12 cm, el lado del grande, en cm, es:

A) 18 B) $9\sqrt{6}$ C) $12\sqrt{3}$ D) $12\sqrt{2}$

E) 21



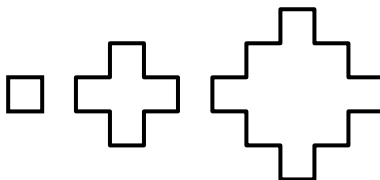
- 19** El valor de a en el sistema: $\begin{cases} a + \sqrt{2}b = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}a + b = \sqrt{2} \end{cases}$, es:

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2} - 1$ C) $2 - \sqrt{2}$ D) $1 - \sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

- 20** El número 2017 se puede escribir de forma única como suma de dos cuadrados perfectos. Las bases de esos cuadrados suman:

A) 47 B) 41 C) 53 D) 55 E) 57

- 21** Vemos los tres primeros polígonos crucigramas de una serie. Si el lado de esos polígonos mide 1 cm, la fórmula del perímetro del crucigrama que ocupa el puesto n es, en cm, del tipo $a \cdot n + b$. El valor de $a - b$ es:



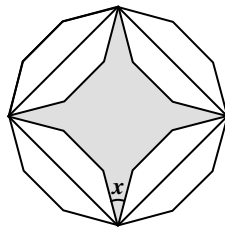
A) 6 B) 7 C) 9 D) 10 E) 12

- 22** Si un número de más de dos cifras termina en 25 su cuadrado también termina en 25. ¿Cuántas terminaciones de dos cifras se conservan al elevar al cuadrado?

A) dos B) tres C) cuatro D) cinco E) seis

- 23** En un dodecágono regular hemos inscrito un cuadrado y usando sus lados como ejes de simetría hemos dibujado una estrella sombreada de cuatro puntas. ¿Cuánto mide el ángulo x ?

A) 20° B) 24° C) 25° D) 30°
E) 36°

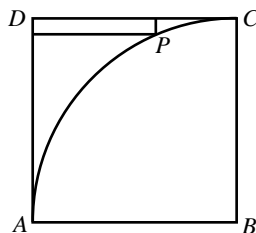


- 24** ¿Cuál es el resto de la división de $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$ entre 8?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

- 25** Con centro en el vértice B del cuadrado $ABCD$ trazamos un arco de circunferencia de radio igual a la longitud del lado del cuadrado. Un punto P de dicho arco dista 8 del lado AD y 1 del lado DC . ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12
E) 13





**XXI CONCURSO DE PRIMAVERA
DE MATEMÁTICAS**

1ª FASE: 22 de febrero de 2017

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS**.

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta que dejes en blanco</i>	1 puntos
<i>Cada respuesta errónea</i>	0 puntos

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

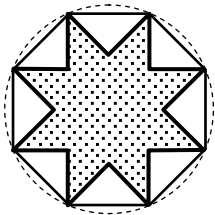
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

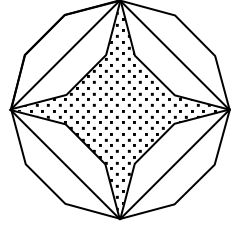
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

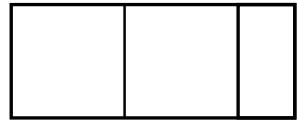
- 1** La ecuación $\log_2 \sqrt{x+1} + \log_2 x = \log_2 \sqrt{x-1} + \log_2 (-x)$
- A) Tiene una solución real B) Tiene dos soluciones reales
 C) Tiene infinitas soluciones reales D) No tiene soluciones reales
 E) Tiene un número finito, mayor que dos, de soluciones reales
- 2** Si $\log_2 \sqrt[4]{0,125} = x$, el valor de $x \cdot n$ es:
- A) -1 B) 2 C) -3 D) 4 E) -5
- 3** ¿Cuántos números menores que 100 son el producto de tres primos?
- A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22
- 4** El lado del octógono regular mide 4 cm. El área de la estrella octogonal de la figura, en cm^2 , es:
- A) $32\sqrt{2}$ B) 32 C) $24\sqrt{2}$
 D) $16\sqrt{2}$ E) 24
- 
- 5** Dado el complejo $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, la suma $1 + z + z^2 + \dots + z^8$ es:
- A) 1 B) i C) 0 D) $-i$ E) -1
- 6** Teniendo en cuenta que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385$, ¿cuánto suman todos los productos de dos números distintos tomados del 1 al 10?
- A) 1650 B) 1540 C) 1430 D) 1320 E) 1210
- 7** Una de las asíntotas de la hipérbola, $y = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 2}$ es:
- A) $y = x + 1$ B) $y = 3x - 1$ C) $y = x + 3$ D) $y = 3x + 1$ E) $y = x - 2$
- 8** El número de soluciones del sistema $\begin{cases} y = x^2 - x + 1 \\ x = y^2 - y + 1 \end{cases}$, es:
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

- 9** En un dodecágono regular hemos inscrito un cuadrado y usando sus lados como ejes de simetría hemos dibujado la estrella sombreada de cuatro puntas de la figura. Si el lado del dodecágono mide 1 cm, el área de la estrella, en cm^2 , es:



- A) $2 + \sqrt{3}$ B) $\frac{6 + \sqrt{2}}{2}$ C) $2\sqrt{3}$
 D) $5 - \sqrt{2}$ E) 4
- 10** En una feria cada diez minutos se sortea un premio entre diez papeletas. Con una papeleta en cada sorteo, ¿cuántas veces debo participar al menos para que la probabilidad de llevarme premio sea mayor que $\frac{1}{2}$?
- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4
- 11** Si $2 + 3i$ es una raíz cuarta de z , también lo es:
- A) $2 - 3i$ B) $3 - 2i$ C) $3 + 2i$ D) $-2 + 3i$ E) $-3 - 2i$

- 12** El rectángulo de la figura está dividido en dos cuadrados y un rectángulo pequeño. Si el rectángulo pequeño es semejante al rectángulo original y el lado de cada cuadrado es 1, ¿cuál es la longitud del lado largo del rectángulo original?



- A) $2\sqrt{3} - 14$ B) $1 + \sqrt{2}$ C) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ E) $8(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
- 13** ¿Cuántos puntos comunes tienen las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = \frac{1}{1 + x^2}$?
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
- 14** Si la base mayor de un trapecio isósceles mide igual que la diagonal y la base menor mide igual que la altura del trapecio, ¿cuál es el cociente entre la longitud de la base menor y la de la base mayor?
- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

15 El máximo valor que alcanza la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ es:

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

16 Lanzamos un dado normal seis veces. Si p es la probabilidad de que en los seis lanzamientos se obtengan números distintos, entonces el número p verifica:

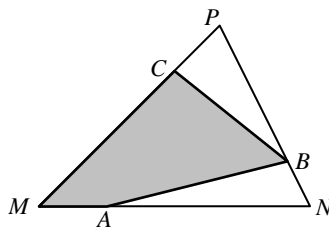
- A) $p \leq 0,02$ B) $0,02 < p \leq 0,04$ C) $0,04 < p \leq 0,0$
 D) $0,06 < p \leq 0,08$ E) $p > 0,1$

17 Si $x^2 + xy + y^2 = 84$ y $x - \sqrt{xy} + y = 6$, ¿cuál es el valor de xy ?

- A) 16 B) 25 C) 36 D) 49 E) 64

18 Los puntos A , B y C de la figura dividen a cada lado del triángulo MNP en dos trozos que están en la relación 1:3. ¿Qué fracción del área del triángulo está sombreada?

- A) $\frac{7}{16}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{9}{16}$
 D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{11}{16}$

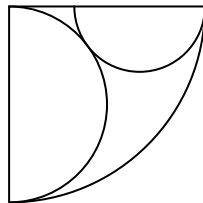


19 Una bolsa contiene m bolas blancas y n bolas negras. Extraemos una bola al azar y la devolvemos a la bolsa añadiendo otras k bolas del mismo color que la extraída. Posteriormente sacamos otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que esta segunda bola sea blanca?

- A) $\frac{m}{m+n}$ B) $\frac{n}{m+n}$ C) $\frac{m}{m+n+k}$ D) $\frac{m+k}{m+n+k}$ E) $\frac{m+n}{m+n+k}$

20 El dibujo muestra un cuarto de circunferencia de radio 2 y dos semicircunferencias tangentes. ¿Cuál es el radio de la semicircunferencia pequeña?

- A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
 E) $\frac{2}{3}$



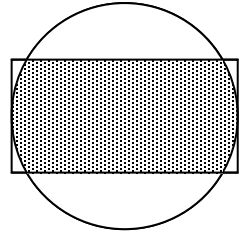
21 ¿Cuáles de las siguientes desigualdades no tienen soluciones reales?

1. $2x < 2^x < x^2$ 2. $x^2 < 2x < 2^x$ 3. $2^x < x^2 < 2x$
 4. $x^2 < 2^x < 2x$ 5. $2^x < 2x < x^2$ 6. $2x < x^2 < 2^x$
 A) 1 y 3 B) 1 y 6 C) 2 y 4 D) 2 y 5 E) 3 y 5

22 ¿Cuál es el menor de los siguientes números?

- A) $10 - 3\sqrt{11}$ B) $8 - 3\sqrt{7}$ C) $5 - 2\sqrt{6}$ D) $9 - 4\sqrt{5}$ E) $7 - 4\sqrt{3}$

23 El círculo y el rectángulo de la figura tienen el mismo centro. Si las dimensiones del rectángulo son 6×12 y los dos lados pequeños del rectángulo son tangentes al círculo, ¿cuál es el área de la región común al rectángulo y al círculo?



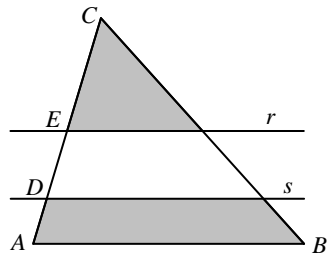
- A) $12\pi + 18\sqrt{3}$ B) $24\pi - 3\sqrt{3}$ C) $18\pi - 8\sqrt{3}$
 D) $18\pi + 12\sqrt{3}$ E) $24\pi + 18\sqrt{3}$

24 En un triángulo rectángulo la bisectriz de un ángulo agudo corta al cateto opuesto en dos trozos de longitudes 1 y 2. ¿Cuál es la longitud del segmento de bisectriz interior al triángulo?

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

25 Las rectas paralelas r y s son también paralelas al lado AB del triángulo ABC de la figura. Si las zonas sombreadas tienen igual área y $\frac{CD}{DA} = 4$, ¿cuál es el valor de $\frac{CE}{EA}$?

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$





**XXI CONCURSO DE PRIMAVERA
DE MATEMÁTICAS**

2ª FASE: 22 de abril de 2017

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS**.

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

PUNTUACIÓN

En los problemas 1 a 13:

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta en blanco o errónea</i>	0 puntos

En los problemas 14 a 25:

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta que dejes en blanco</i>	1 punto
<i>Cada respuesta errónea</i>	0 puntos

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Smartick

- 1 ¿Qué dos números son los siguientes en esta serie?
4, 7, 8, 13, 12, 19, 16,...
- A) 25 y 24 B) 20 y 24 C) 24 y 20 D) 25 y 20 E) 20 y 28
- 2 Dispones de una cinta de un metro de longitud. Si cada día cortas dos centímetros, ¿en cuántos días queda cortada toda la cinta?
- A) 39 B) 40 C) 50 D) 49 E) 99
- 3 Ya sabes que dos puntos sobre una recta determinan un único segmento. ¿Cuántos segmentos diferentes determinan en la recta los seis puntos *A, B, C, D, E* y *F*?



- A) 12 B) 15 C) 10 D) 18 E) 36
- 4 Un tarro lleno de miel pesa 500 gramos y ese mismo tarro lleno de leche pesó 350 gramos. Si sabemos que la leche pesa la mitad que la miel, ¿cuántos gramos pesa ese tarro vacío?
- A) 100 B) 150 C) 175 D) 200
E) 225
- 5 Comenúmeros está descontrolado. Ayer cogió mi libro de Lengua y se comió una a una todas las cifras que numeraban las páginas, salvo los sietes que le sientan mal. Mi libro tiene 86 páginas y todas estaban numeradas. ¿Cuántas cifras se comió el glotón?
- A) 145 B) 141 C) 162 D) 132 E) 150
- 6 Ainhoa tiene muchos palitos de longitudes 3, 5 y 10 cm. ¿Cuántos triángulos distintos puede construir con sus palitos?
- A) 3 B) 6 C) 7 D) 9 E) 12
- 7 Para celebrar el vigésimo primer aniversario del Concurso de Primavera, Joaquín asó un cordero lechal de 3 kg y 600 g. Durante el asado, el cordero perdió un tercio de su peso. Entre Joaquín, Juan Jesús, Javier, María, Merche, Esteban, Alfredo e Isabel comieron el cordero asado a partes iguales. ¿Cuántos gramos de cordero comió María?
- A) 200 B) 220 C) 280 D) 300 E) 320



8

Si tiras cuatro dados iguales, ¿de cuántas formas puede ocurrir que la suma de los puntos obtenidos sea 15?

- A) 10 B) 12 C) 8 D) 11 E) 9



9

Oso dice: “*Drilo*, te has puesto morado; por cada pez que me he comido yo, tú te has comido ocho”. “Claro, yo los engullo de cinco en cinco”, contestó *Drilo*. Si en el río había más de 100 peces y menos de 150, ¿cuántos peces más comió *Drilo* que *Oso*?

- A) 45 B) 70 C) 80 D) 91 E) 105



10

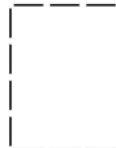
Dentro de cinco años la suma de las edades de los cuatro hijos del señor Carpanta será 50. ¿Cuál será esta suma dentro de dos años?

- A) 34 B) 36 C) 38 D) 40 E) 42

11

Miguel ha formado este rectángulo ayudándose de 14 palitos iguales. Si Miguel usara exactamente 24 palitos para hacer cada rectángulo, ¿cuántos rectángulos diferentes podría formar?

- A) 6 B) 3 C) 9 D) 4 E) 8



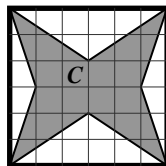
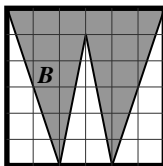
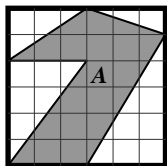
12

En el pueblo de don Retorcido hay dos relojes. El reloj del ayuntamiento adelanta cinco segundos cada hora y el reloj de la iglesia se retrasa quince segundos cada hora. El alcalde y el cura han puesto a la vez los dos relojes en hora. ¿Cuántas horas tienen que pasar como mínimo para que un reloj marque una hora más que el otro?

- A) 360 B) 282 C) 180 D) 228 E) 280

13

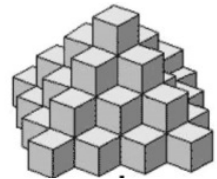
Hemos dibujado tres figuras en una cuadrícula. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?



- A) Todas tienen igual área B) El área de A es mayor que el área de B
 C) El área de B es mayor que la de C D) El área de C es mayor que el área de A
 E) Todas las áreas son distintas

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

- 14** ¿Cuántos triángulos podremos formar que tengan sus vértices en los vértices de un pentágono regular?
 A) 6 B) 30 C) 20 D) 12 E) 10
- 15** Tengo cinco matrioskas. La altura de cada una mide $\frac{3}{4}$ de lo que mide la anterior. Si la más grande mide 16 cm, ¿qué número aproxima mejor los milímetros que mide la más pequeña?
 A) 20 B) 35 C) 45 D) 50 E) 65
- 16** En una cesta hay en total veinte frutas entre peras, manzanas y naranjas. Hemos contado doce manzanas, más peras que naranjas y nueve frutas podridas. Si sabemos además que hay siete manzanas sanas y tres naranjas podridas, ¿cuántas peras hay en la cesta?
 A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
- 17** En el cajón de los calcetines tengo 10 calcetines azules, 12 rojos, 8 verdes y 4 marrones. A oscuras saco uno, que resulta ser azul, ¿cuál es la probabilidad de que al coger otro también sea azul?
 A) $\frac{10}{33}$ B) $\frac{3}{11}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{9}{34}$ E) $\frac{5}{17}$
- 18** En un juego entre tres personas, cuando uno pierde, debe pagar a los otros dos y darle tantos euros como cada uno tenga; es decir, debe duplicar el dinero de cada uno de los adversarios. Tras una partida todos terminan con 24 euros, ¿cuántos euros tenía el que perdió la partida?
 A) 72 B) 122 C) 64 D) 86 E) 48
- 19** ¿Cuántos cubos se han usado para la construcción de esta torre?
 A) 25 B) 30 C) 44 D) 48 E) 31
- 20** He dibujado un rectángulo en el que la longitud de la base es el doble de la longitud de la altura. Si el área de mi rectángulo es 50 cm^2 , ¿cuál es, en centímetros, su perímetro?
 A) 25 B) 15 C) 20 D) 50 E) 30



- 21** El nanómetro es una medida de longitud que se usa para cosas muy pequeñas. Un metro son mil millones de nanómetros. Para calcular el grosor de una hoja de papel Lucía ha visto que un taco de diez hojas mide un milímetro. ¿Cuántos nanómetros mide una sola hoja?
- A) 100 000 B) 1000 C) 10 000 D) 1 000 000 E) 100
- 22** El lunes, Don Retorcido regaló a Pilar la mitad de las fracciones que llevaba; el martes dio la mitad de las que le quedaban a Jesús; el miércoles, la mitad del resto a Pablo. Y siguió así con Luis, después con Hugo, y por último con Marco. Al final le quedaron tres fracciones. ¿Cuántas fracciones recibió Hugo?
- A) 6 B) 9 C) 8 D) 10 E) 12
- 23** En un cine hay 200 personas. De ellas, 130 son mujeres y sabemos además que 90 personas llevan gafas. He observado que, curiosamente, la mitad de los hombres llevan gafas. ¿Cuántas mujeres no llevan gafas?
- A) 80 B) 85 C) 75 D) 55 E) 70
- 24** Luis cumple hoy 36 años. Su edad es nueve veces la de su gato Bisbís. La edad de su perro Guaguá es tres medios la de Bisbís. La suma de las edades de Guaguá y Bisbís es...
- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 13
- 25** Dispones de seis fichas; dos con el número 1, otras dos con el número 2 y otras dos con el número 3. ¿Cuántos números distintos de tres cifras puedes formar con esas fichas?
- A) 24 B) 18 C) 27 D) 15 E) 30



**XXI CONCURSO DE PRIMAVERA
DE MATEMÁTICAS**

2ª FASE: 22 de abril de 2017

NIVEL II (1º v 2º de E.S.O.)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS**.

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

PUNTUACIÓN

En los problemas 1 a 13:

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta en blanco o errónea</i>	0 puntos

En los problemas 14 a 25:

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta que dejes en blanco</i>	1 punto
<i>Cada respuesta errónea</i>	0 puntos

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

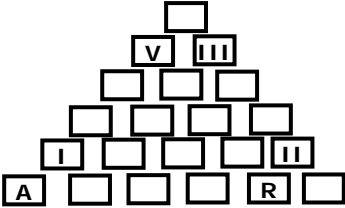
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Smartick

- 1** ¿Cuál de estos resultados está más cerca de 100?
A) $(20 - 17) \cdot (20 + 17)$ **B)** $201 + 7 \cdot 20 + 17$ **C)** $20 \cdot 17 - (201 + 7)$
D) $20 \cdot (1 + 7) - 20 - 17$ **E)** $20 + 17 + 20 + 17$
- 2** Alba colecciona pirámides y prismas, todos ellos de base cuadrada. Si en total tiene 42 figuras y ha contado 288 vértices, ¿cuántas pirámides hay en su colección?
A) 24 **B)** 14 **C)** 22 **D)** 26 **E)** 16
- 3** La báscula de doña Esmeralda está estropeada y siempre marca un peso 120 gramos inferior al real. Por otro lado doña Esmeralda cree que su báscula marca siempre 180 gramos más que el peso verdadero. Con todo este lío, doña Esmeralda pesó un melón y dedujo que pesaba 2 kilos. ¿Cuántos gramos pesa realmente el melón?
A) 2180 **B)** 1940 **C)** 2060 **D)** 1700 **E)** 2300
- 4** El área de un triángulo rectángulo es de 84 m^2 . Si un cateto mide 24 m, ¿cuántos metros mide su hipotenusa?
A) 25 **B)** 26 **C)** 27 **D)** 28 **E)** 30
- 5** Definimos la operación $a \heartsuit b = a \cdot (a + b)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
I. $8 \heartsuit 2 - 2 \heartsuit 8 = 6 \heartsuit 4$ **II.** Si $4 \heartsuit b = 28$, entonces $b = 3$
A) Solo I **B)** Solo II **C)** I y II **D)** Ninguna **E)** Imposible saberlo
- 6** He construido una pared triangular con ladrillos rojos (R), verdes (V) y amarillos (A), de forma que un ladrillo no está en contacto con otro ladrillo de su mismo color. ¿Cuál es la secuencia de colores de los ladrillos I–II–III?
A) R–A–A **B)** R–A–R
C) V–A–R **D)** V–A–A
E) V–V–A
- 

8

Todos los días, ininterrumpidamente y sin variar la velocidad, sale a cada hora en punto un barco que va de la isla Pi a la isla Pa y exactamente igual otro barco que va de Pa a Pi. Si el trayecto dura cuatro horas, te preguntamos: ¿Cuántos cruces de barcos se producen en el mar (no vale en el puerto) en el período que va desde las 10:59 h a las 15:01 h?



- A) 15 B) 31 C) 12 D) 14 E) 36

9

Tres preguntas: ¿Qué número hay que sumar a -7 para obtener -1 ? ¿Qué número hay que restar a -5 para obtener 4 ? ¿Qué número hay que restar a 9 para obtener -4 ? Y una pregunta final: ¿Cuál es la suma de esos tres números?

- A) -4 B) 12 C) 8 D) -2 E) 10

10

Don Retorcido está aburrido. Coge una hoja de papel que mide $40\text{ cm} \times 20\text{ cm}$; hace dos dobleces, a lo largo y a lo ancho, por la mitad; corta por esos dobleces y consigue cuatro hojas más pequeñas, todas iguales. Como sigue aburrido, vuelve a repetir sus cortes con cada una de las hojas. Don Retorcido ya no está aburrido porque tiene un nuevo problema: ¿Cuál es la suma de los perímetros de todas esas hojitas que hay ahora?

- A) 480 cm B) 6 m C) 120 cm D) 4 m E) 240 cm

11

Tres amigas están a sus cosas y comentan.

Ana: “Ya me sé los tres quintos de los versos que tengo que aprenderme”.

Berta: “Es curioso porque yo me sé el mismo número de versos que tú pero aún me quedan dos tercios para terminar”.

Carolina: “Es fascinante, yo aún no he empezado y tengo que aprenderme 48 versos, o sea, justo el doble de lo que os queda a vosotras juntas”.

¿Cuántos versos en total tenían que aprenderse las tres amigas?

- A) 88 B) 96 C) 90 D) 80 E) 144

12

Hugo está contento. Dibuja un cuadrado de 10 cm de lado, encima uno de 9 cm de lado y luego otro de 8 cm , y así piensa continuar hasta que coloque el cuadrado de 1 cm de lado. ¿Cuántos centímetros medirá el perímetro de su figura cuando termine de colocar los diez cuadrados?

- A) 110 B) 120 C) 130 D) 125 E) 129



- 13** Tienes que colocar todos los números enteros desde el 1 hasta el 9 en esa cuadrícula, teniendo en cuenta que los números exteriores indican el producto de las tres casillas de su fila o columna correspondiente. ¿En qué casilla está el 2?

A	D	G	21
B	E	H	60
C	F	I	288
112	72	45	

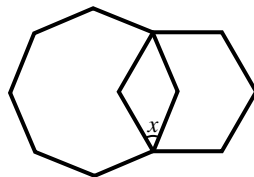
- A) A B) B C) C D) D E) E

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

- 14** Mi número tiene seis cifras y empieza por 1: $1ABCDE$. Si lo multiplico por tres, el 1 pega un brinco y pasa al final, obteniendo así este número: $ABCDE1$. ¿Cuál es el valor de $A+B+C+D+E$?

- A) 26 B) 19 C) 28 D) 22 E) 25

- 15** María ha construido un octógono regular y Esteban un hexágono también regular, aunque ha tenido que utilizar lados ligeramente más grandes que los del octógono para que al superponerlos coincidan los dos vértices que muestra la figura. ¿Cuál es la amplitud del ángulo x ?



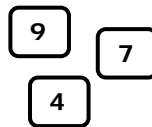
- A) $54,5^\circ$ B) 60° C) $52,5^\circ$ D) $62,5^\circ$ E) 66°

- 16** Comenúmeros se entretiene con tres números a , b , c , distintos y mayores que 1. Si te dice que $\text{mcm}(a, b) = 12$ y que $\text{mcm}(a, c) = 15$, ¿cuál de estas cinco opciones no puede ser el resultado de $b + c$?



- A) 27 B) 19 C) 9 D) 17 E) 7

- 17** Miriam tiene tres tarjetas en las que ha escrito seis números diferentes, uno en cada cara. Aquí te enseña una cara de cada tarjeta. Luego juega a voltearlas y anota las ocho posibles sumas que pueden obtenerse: 10, 12, 12, 14, 16, 18, 18, 20. ¿Cuánto suman las tres caras que no se ven?



- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

- 18** Álvaro dibuja dos circunferencias. El área que encierra una mide 100π m² y el perímetro de la otra mide 100π m. ¿Cuál es, en metros, la diferencia de los radios de estas circunferencias?

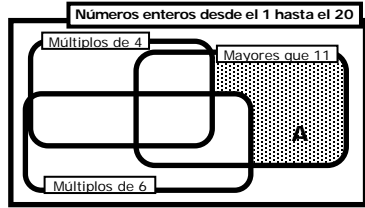
- A) 10 B) 50 C) 90 D) 40 E) 0

19 Si los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{2}{5}$ de A es igual que los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{5}$ de B , ¿qué podemos asegurar de los números A y B ?

- A) $A = 2B$ B) $3A = 4B$ C) $2A = 5B$ D) $A = 3B$ E) $2A = 3B$

20 ¿Cuántos números hay que colocar en el recinto punteado, A ?

- A) 7 B) 2 C) 5
D) 8 E) 6



21 Si ordenamos estos tres números, $P = 11^{51}$, $Q = 1317^{17}$, $R = 37^{34}$, de menor a mayor, obtenemos...

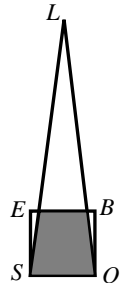
- A) $P < Q < R$ B) $R < Q < P$ C) $R < P < Q$ D) $Q < P < R$ E) $Q < R < P$

22 Comenúmeros me ha quitado la calculadora y ha bailado todas las teclas numéricas salvo la del cero. Ningún número se corresponde con el correcto. Estos son algunos resultados que me salen ahora: $12 \cdot 12 = 1156$, $3 \cdot 3 = 81$, $45 \cdot 45 = 144$, $67 \cdot 67 = 5625$. ¿Qué número aparece en pantalla cuando pulso la tecla 9?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

23 Si el área del cuadrado $BESO$ es 16 cm^2 y el área del triángulo SOL es el doble, ¿cuál es, en cm^2 , el área del trapecio coloreado?

- A) 14 B) 10 C) 15 D) 13 E) 12



24 Dentro de cinco años podré afirmar: “dentro de dieciséis años mi edad será el doble de la que tenía hace dos años”. Si x representa la edad que tengo hoy, ¿cuál de estas ecuaciones se corresponde con dicha situación?

- A) $x + 21 = 2(x + 14)$ B) $x + 21 = 2(x - 19)$
C) $x + 21 = 2(x + 3)$ D) $x + 21 = 2(x - 2)$
E) $x + 16 = 2(x + 3)$

25 Perico recita todos los números desde el 1 hasta el 40 y la rana Gustavita, cada vez que oye un número primo avanza tantos metros como indica dicho número. Al final ha recorrido 230 metros y Perico le advierte que ha tomado por primo un número que no lo era. ¿En qué número se equivocó Gustavita?

- A) 27 B) 33 C) 9 D) 15 E) 21



**XXI CONCURSO DE PRIMAVERA
DE MATEMÁTICAS**

2ª FASE: 22 de abril de 2017

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS**.

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

PUNTUACIÓN

En los problemas 1 a 13:

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta en blanco o errónea</i>	0 puntos

En los problemas 14 a 25:

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta que dejes en blanco</i>	1 puntos
<i>Cada respuesta errónea</i>	0 puntos

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Smartick

1

En cada casilla de la figura debe haber un entero positivo menor que 10. La suma de los números de cada fila ha de ser la misma, al igual que la suma de los de cada columna, aunque esta suma no tiene por qué ser igual a la suma de cada fila. ¿Qué número debe estar en la casilla sombreada?

2	4		2
	3	3	
6		1	

- A) 1 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

2

Bea dice que el 25 % de sus libros son novelas y que $\frac{1}{9}$ del total son libros de poesía. Si el número de libros que tiene está entre 50 y 100, ¿cuántos de ellos no son ni novelas ni de poesía?

- A) 46 B) 47 C) 48 D) 49 E) 50

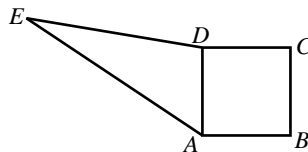
3

Dos lados de un cuadrilátero miden 4 y 1. Una de las diagonales, de longitud 2, divide al cuadrilátero en dos triángulos isósceles. ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

4

El lado del cuadrado $ABCD$ mide 4 cm. Si el triángulo EAD tiene igual área que el cuadrado, ¿cuál es la distancia del vértice E a la recta determinada por B y C ?



- A) 8 B) $4 + 2\sqrt{3}$ C) 12
D) $10\sqrt{2}$ E) Depende de la posición de E

5

Uno de los problemas del Concurso de Primavera se le atascaba a Jorge, pero fue capaz de llegar a las siguientes conclusiones, todas ellas correctas:

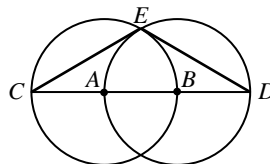
- Si la respuesta **A** fuera correcta, también lo sería la respuesta **B**.
- Si la respuesta **C** no es la correcta, tampoco lo sería la **B**.
- Si la respuesta **B** no es la correcta, entonces ni la **D** ni la **E** son la correcta.

¿Cuál de las siguientes respuestas es la correcta?

- A) **A** B) **B** C) **C** D) **D** E) **E**

6

Las circunferencias de la figura son iguales y de centros A y B . Cada una de ellas pasa por el centro de la otra y la recta que pasa por los centros corta también a las circunferencias en los puntos C y D . Si E es un punto común a ambas circunferencias, ¿cuál es el ángulo $\hat{C}ED$?

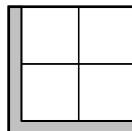


- A) 105° B) 110° C) 120° D) 130° E) 135°

- 7 Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, escritos en algún orden, formamos el número de cinco cifras $PQRST$. Si el número de tres cifras PQR es divisible por 4, el QRS es divisible por 5 y el RST es divisible por 3, ¿qué cifra representa la letra P ?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

- 8 Dividimos un cuadrado de 125 cm^2 de área en cinco regiones, cuatro cuadrados y un polígono en forma de L sombreado en la figura, todas de igual área. ¿Cuál es la longitud, en cm, del lado más corto del polígono en forma de L?



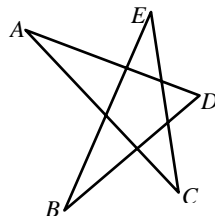
A) 1 B) 1,5 C) $2(\sqrt{5}-2)$ D) $\sqrt{5}-1$ E) $5(\sqrt{5}-2)$

- 9 Los números a, b, c, d, e verifican: $a-b=2$, $b-c=3$, $c-d=4$ y $d-e=5$. ¿Cuál es el valor de $\frac{e}{a}$?

A) $\frac{15}{8}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 2

- 10 ¿Cuál es la suma de la medida de los ángulos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} y \hat{E} de la estrella de la figura?

A) 270° B) 180° C) 210° D) 240°
E) 360°



- 11 Tengo dos dados cúbicos, uno rojo y otro azul. Si lanzo los dos dados a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que el número que muestra el dado rojo sea mayor que el que muestra el dado azul?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{19}{36}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{4}{9}$

- 12 Todos los estudiantes de una clase hicieron una prueba. Cinco de ellos obtuvieron la puntuación máxima, 100 puntos, ninguno obtuvo menos de 60 puntos y la media de la clase fue de 76 puntos. ¿Cuántos estudiantes, como poco, había en la clase?

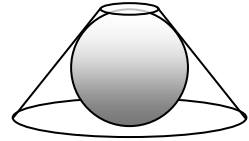
A) 10 B) 11 C) 13 D) 15 E) 20

- 13 Los puntos A, B, C y D , en este orden, determinan un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. Los lados AB y CD son paralelos, el ángulo $\hat{ADC} = 50^\circ$ y los ángulos \hat{BAC} y \hat{BCA} son iguales. ¿Cuánto mide el ángulo \hat{DAC} ?

A) 110° B) 105° C) 90° D) 85° E) 50°

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

- 14** Los radios de las bases de un tronco de cono son 18 y 2. ¿Cuál es el radio de la esfera inscrita en ese tronco de cono?



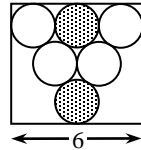
- A) 6 B) $4\sqrt{5}$ C) 9 D) 10
E) $6\sqrt{3}$

- 15** Ayer nacieron cuatro bebés en un hospital. Se consideran los siguientes sucesos:
A: “Los cuatro fueron del mismo sexo”
B: “Exactamente tres son del mismo sexo”
C: “Dos son niños y dos niñas”
D: “Más de dos son niños”.

Suponiendo que es igual de probable que nazca un niño que una niña, ordena de menor a mayor probabilidad los cuatro sucesos:

- A) ABCD B) DABC C) ADCB D) ADBC E) BADC

- 16** En el interior del rectángulo de la figura, uno de cuyos lados mide 6 cm, hay seis circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo. ¿Cuál es la distancia entre los puntos más cercanos de los círculos sombreados?

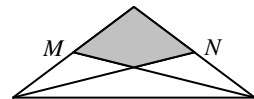


- A) $\frac{3}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2(\sqrt{3}-1)$ D) $\frac{\pi}{2}$
E) 2

- 17** Si Raquel se sube en una mesa y Pablo se queda en el suelo, Raquel es 80 cm más alta que Pablo, pero si es Pablo el que se sube a la mesa y Raquel se queda en el suelo, entonces Pablo es un metro más alto que Raquel. ¿Cuál es, en cm, la altura de la mesa?

- A) 50 B) 60 C) 70 D) 80 E) 90

- 18** En la figura se observa un triángulo isósceles dividido en cuatro regiones de las que conocemos las áreas de los tres triángulos: 3, 3 y 6. Si M y N son los puntos medios de los lados iguales, ¿cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



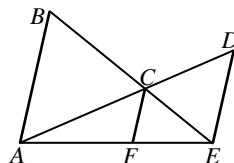
- A) 4 B) 4,5 C) 5 D) 6 E) 7

- 19** ¿Qué edad tienes?, le preguntan a Pablo y así contesta: “Si yo viviera 100 años, mi edad actual sería los cuatro tercios de la mitad de lo que me quedaría por vivir”. ¿Cuál es la edad de Pablo?

- A) 20 B) 40 C) 50 D) 60 E) 80

- 20** El volumen de un cono construido con un sector circular de radio 3 y ángulo de 40° es:
 A) $\frac{4\pi\sqrt{5}}{81}$ B) $\frac{10\pi}{9}$ C) $\frac{4\pi\sqrt{5}}{243}$ D) 9π E) $\frac{8\pi}{27}$

- 21** En la figura adjunta los segmentos AB , FC y ED son paralelos. Si la longitud del segmento AB es 10 y la del ED es 7, la longitud del segmento FC es:

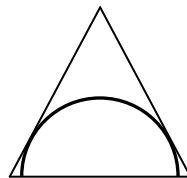


- A) $\frac{70}{17}$ B) $\frac{14}{3}$ C) $\frac{47}{14}$ D) $\frac{32}{5}$
 E) $\frac{30}{7}$

- 22** Una bolsa contiene 3 bolas rojas y 2 bolas verdes. Sacamos, una a una y sin devolución, bolas de la bolsa hasta que hayamos sacado todas las bolas de uno de los colores. ¿Cuál es la probabilidad de que hayamos sacado las tres bolas rojas?

- A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{7}{10}$

- 23** Inscribimos una semicircunferencia en un triángulo isósceles de base 16 y altura 15, como muestra la figura. ¿Cuál es su radio?

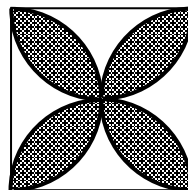


- A) $4\sqrt{3}$ B) $\frac{120}{17}$ C) 5 D) $\frac{17\sqrt{2}}{2}$
 E) $\frac{17\sqrt{3}}{2}$

- 24** ¿Cuál es el resto de la división de $x^{100} - 2x^{99} + 4$ entre $x^2 - 3x + 2$?

- A) $x + 2$ B) $x + 1$ C) $2x + 1$ D) $x - 1$ E) $3x - 2$

- 25** Sobre los lados de un cuadrado se trazan unas semicircunferencias de radio a , como muestra la figura. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?



- A) $(2\pi - 4)a^2$ B) $\frac{\pi}{8}a^2$ C) $\frac{8 - \pi}{4}a^2$
 D) $(4\pi - 2)a^2$ E) $2a^2$



**XXI CONCURSO DE PRIMAVERA
DE MATEMÁTICAS**

2ª FASE: 22 de abril de 2017

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS**.

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

PUNTUACIÓN

En los problemas 1 a 13:

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta en blanco o errónea</i>	0 puntos

En los problemas 14 a 25:

<i>Cada respuesta correcta te aportará</i>	5 puntos
<i>Cada pregunta que dejes en blanco</i>	1 puntos
<i>Cada respuesta errónea</i>	0 puntos

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

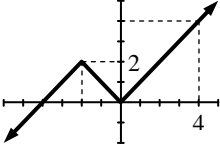
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

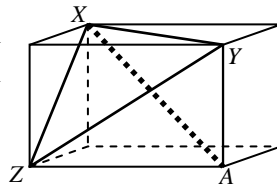
Grupo SM

Smartick

- 1** Si f es una función lineal que verifica $f(2017) - f(2005) = 100$, ¿cuál es el valor de $f(2035) - f(2017)$?
- A) 75 B) 100 C) 120 D) 150 E) 180
- 2** Considera todos los números de nueve cifras. Escribimos cada uno de ellos en una tarjeta y los metemos en una enorme caja. ¿Cuál es el mínimo número de tarjetas que debemos sacar para estar seguros de que al menos dos de ellos coinciden en el primer dígito?
- A) 9! B) 8! C) 72 D) 10 E) 9
- 3** El número $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ es igual a:
- A) $\sqrt{5} - 1$ B) 1 C) $\sqrt[3]{2}$ D) $\sqrt{5} - \sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[3]{4}$
- 4** La gráfica de la función f está compuesta por tres trozos rectilíneos, como muestra la figura. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(f(f(x))) = 0$?
- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0
- 
- 5** Si f es una función periódica de periodo $T = 5$ y en el intervalo $[3, 8)$ verifica que $f(x) = x^2 - 10x + 25$, ¿cuál es el valor de $f(2017)$?
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 9
- 6** Un círculo de radio r está dentro de otro de radio R . Si el cociente entre el área del círculo grande y el área de la región que está fuera del pequeño pero dentro del grande es $\frac{x}{y}$, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el cociente $\frac{R}{r}$?
- A) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ B) $\frac{x}{\sqrt{x-y}}$ C) $\frac{y}{\sqrt{x-y}}$ D) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-y}}$ E) $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}}$
- 7** ¿Cuántas parejas de enteros (x, y) , con $x \leq y$, verifican que su producto es igual a cinco veces su suma?
- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

- 8** Si f es la función $f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \sqrt{x}$ definida en el intervalo $(0, 1)$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces $f(\operatorname{tg}^2\theta)$ es igual a:
- A) $\operatorname{sen}\theta$ B) $\operatorname{cos}\theta$ C) $\operatorname{cotg}\theta$ D) $\operatorname{sec}\theta$ E) $\operatorname{cosec}\theta$

- 9** Las longitudes de los lados del triángulo XYZ son 8, 9 y $\sqrt{55}$. ¿Cuál es la longitud de la diagonal XA del ortoedro de la figura?



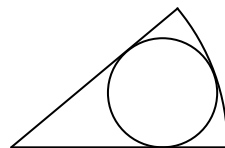
- A) $\sqrt{90}$ B) 10 C) $\sqrt{120}$
D) 11 E) $\sqrt{200}$
- 10** El conjunto de puntos del plano (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x^2 - xy + x - y = 0$ es:

- A) Una elipse B) Una parábola C) Un punto D) Una recta E) Dos rectas secantes
- 11** En un cajón hay calcetines de ocho colores y ocho de cada color. Si sacamos dos calcetines al azar del cajón, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

- A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{7}{64}$ E) $\frac{9}{64}$

- 12** Si el cociente entre el radio del sector circular y el radio del círculo inscrito es 3, ¿cuál es el cociente entre sus áreas?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{6}{5}$



- E) $\frac{5}{4}$

- 13** ¿Cuál es el resto de la división $(x^{200} - 2x^{199} + x^{50} - 2x^{49} + x^2 + x + 1) : (x^2 - 3x + 2)$?

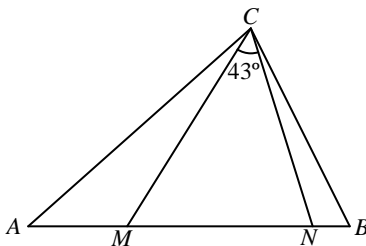
- A) $2x - 1$ B) 7 C) $2x + 3$ D) 1 E) $6x - 5$

- 14** Si las soluciones de la ecuación $x^2 - bx + c = 0$ son $x_1 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}$, $x_2 = \cos \frac{\pi}{7}$, entonces b^2 es igual a:
 A) c B) $1 + 2c$ C) $1 + c$ D) $1 - c$ E) $1 + c^2$

- 15** Alicia tenía escritos diez enteros positivos consecutivos y Comenúmeros se comió uno de ellos. Si la suma de los restantes es 2017, ¿qué número se comió?
 A) 218 B) 219 C) 228 D) 235 E) 237

- 16** Cuando un cierto sólido se funde y pasa al estado líquido su volumen crece $\frac{1}{12}$. Si a continuación se solidifica, ¿cuánto decrece ahora su volumen?
 A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{13}$ E) $\frac{1}{14}$

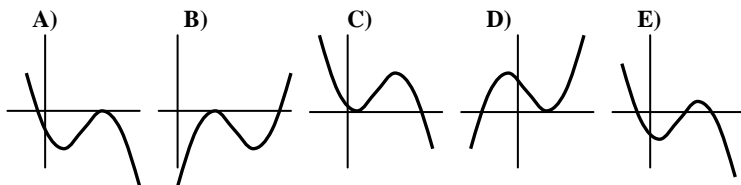
- 17** En el triángulo ABC de la figura, los puntos M y N están en el lado AB y verifican $AN = AC$ y $BM = BC$. Si el ángulo \widehat{MCN} es de 43° , cuál es la medida del ángulo \widehat{ACB} ?
 A) 86° B) 89° C) 90°
 D) 92° E) 94°



- 18** Los puntos A y B están en la gráfica de la parábola $y = x^2 + 7x - 1$ siendo el origen de coordenadas el punto medio del segmento AB . ¿Cuál es la longitud de dicho segmento?
 A) $10\sqrt{2}$ B) $5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $5 + \sqrt{2}$ D) 7 E) $5\sqrt{2}$

- 19** Si x e y son números reales, ¿cuántas soluciones (x, y) tiene la ecuación $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?
 A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) Infinitas

- 20** Si $a < b$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de la función $f(x) = (a-x)(b-x)^2$?



- 21** Un cuadrado tiene un vértice en el punto $P(1, 2)$ y otro en la recta $y - 3x = 4$. ¿Cuál es el menor valor posible para su área?

A) 5 B) 4 C) 2,5 D) 1,25 E) 1

- 22** ¿Cuántos ángulos α , entre 0 y 2π verifican que $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

- 23** Si a , b y c son números positivos tales que $b = a^{30}$ y $c = a^{42}$, el $\log_b c$ es igual a:

A) $\frac{5}{7}$ B) 12 C) 9^{12} D) -12 E) $\frac{7}{5}$

- 24** Definimos la “distancia taxi” entre los puntos del plano $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ mediante la expresión $d_{\text{taxi}}(P, Q) = |a - c| + |b - d|$. ¿Qué figura determina el conjunto de puntos del plano cuya distancia taxi al origen es 2?

A) Un cuadrado B) Una recta C) Una circunferencia
D) Dos rectas E) El conjunto vacío

- 25** ¿Cuál de los siguientes números es el más próximo a $\sqrt{101} - 10$?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{18}$ C) $\frac{1}{20}$ D) $\frac{1}{22}$ E) $\frac{1}{24}$

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	D	1	A	1	B	1	D
2	B	2	E	2	C	2	C
3	D	3	A	3	E	3	E
4	D	4	B	4	C	4	A
5	A	5	B	5	A	5	A
6	C	6	E	6	E	6	D
7	D	7	B	7	E	7	D
8	C	8	D	8	D	8	B
9	D	9	A	9	D	9	A
10	C	10	A	10	B	10	B
11	C	11	C	11	B	11	B
12	B	12	B	12	D	12	B
13	E	13	C	13	D	13	C
14	A	14	A	14	B	14	B
15	E	15	E	15	D	15	A
16	A	16	E	16	C	16	A
17	E	17	B	17	D	17	A
18	C	18	D	18	C	18	D
19	E	19	A	19	C	19	A
20	D	20	D	20	C	20	E
21	A	21	D	21	E	21	E
22	E	22	B	22	C	22	A
23	B	23	B	23	D	23	A
24	B	24	C	24	C	24	C
25	A	25	E	25	E	25	D

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	D	1	A	1	B	1	D
2	D	2	E	2	A	2	D
3	B	3	E	3	D	3	B
4	D	4	A	4	C	4	A
5	A	5	C	5	C	5	D
6	C	6	D	6	C	6	D
7	D	7	B	7	A	7	A
8	D	8	B	8	E	8	A
9	E	9	E	9	A	9	B
10	C	10	A	10	B	10	E
11	A	11	C	11	D	11	C
12	C	12	C	12	C	12	A
13	C	13	B	13	B	13	E
14	E	14	A	14	A	14	B
15	D	15	C	15	C	15	C
16	C	16	E	16	C	16	D
17	B	17	A	17	E	17	E
18	E	18	D	18	D	18	A
19	C	19	B	19	B	19	E
20	E	20	C	20	A	20	A
21	A	21	D	21	A	21	D
22	A	22	E	22	B	22	C
23	C	23	A	23	B	23	E
24	C	24	C	24	A	24	A
25	A	25	B	25	A	25	C

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (D) Realizamos las operaciones y comprobamos.
 $1,3 \times 1,3 = 1,69$; $2 - 0,32 = 1,68$; $3,3 \div 2 = 1,65$; $0,69 + 1,01 = 1,70$;
 $2,8 \times 0,6 = 1,68$. El resultado mayor es 1,70
2. (B) Si el perímetro del cuadrado mide 12 cm su lado medirá 3 cm de donde obtenemos que los lados del rectángulo medirán, respectivamente, 3 cm y $5 \times 3 = 15$ cm. cm. Por tanto, el área será $15 \times 3 = 45$ cm².
3. (D) Los minutos de anuncio son igual al número de minutos ante la tele, menos el número de minutos que dura el capítulo, es decir:
 Tres cuartos de hora = 45 minutos. $45 - 38 = 7$ minutos.

4. (D) Resolución a)

El número de diagonales es igual al número de segmentos que unen, dos a dos, los 10 vértices menos el número de lados (10 en nuestro caso). Dicho de otra forma: el número de diagonales es igual al número de parejas de vértices menos el número de lados.

El primer vértice se puede emparejar con los otros 9; el segundo solo con 8 (con el primero ya estaba emparejado); el tercero solamente con 7 (ya estaba emparejado con los dos primeros) y así sucesivamente hasta el noveno que solo se podrá emparejar con el décimo. Por lo tanto el número de diagonales es:

$$(9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) - 10 = 45 - 10 = 35.$$

Resolución b)

Cada uno de los vértices puede emparejarse con los otros nueve, pero cada una de las parejas estaría repetida (el segmento AB es el mismo que el BA). Por lo tanto el número de segmentos que pueden obtenerse es $(10 \times 9) : 2 = 45$.

El número de diagonales será entonces, $45 - 10 = 35$.

Resolución c)

Un método sencillo para la resolución de este problema consiste en el cálculo de diferencias de los términos de una serie. Para ello construimos esta tabla.

Nº de lados del polígono	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nº de diagonales	0	2	5	9	14	20	27	35	44

+2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9

Un decágono regular tiene 35 diagonales

5. (A) Como la suma de puntos de un solo dado es 21 y hay cuatro dados, la suma total de puntos será $4 \times 21 = 84$. Por otra parte, dado que tenemos 30 puntos a la vista, la suma de los puntos ocultos será $84 - 30 = 54$.

6. (C) Midiendo todo en mm tenemos:

Un ovillo de 120 000 mm para hacer conjuntos completos constituidos por:

Un collar de 1200 mm, más una pulsera de 245 mm, más un anillo de 55 mm.

Como para cada conjunto necesita $1200 + 245 + 55 = 1500$ mm de lana, podrá hacer $120\,000 : 1500 = 80$ conjuntos completos.

7. (D) Tenemos que analizar 8 tablas. En cada una de ellas tenemos, al comienzo y al final un uno (por ejemplo 3×1 y 3×10), con lo que contamos ya con 16 unos. Por otra parte debemos considerar los números de dos cifras que comiencen o terminen en uno. De los que comienzan por uno, solo consideramos los números: 10, 12, 14, 15, 16 y 18, ya que los otros son primos. Veremos ahora cuántas veces aparece cada uno de ellos:

$$10 = 2 \times 5 = 5 \times 2$$

$$12 = 2 \times 6 = 6 \times 2 = 3 \times 4 = 4 \times 3$$

$$14 = 2 \times 7 = 7 \times 2$$

$$15 = 3 \times 5 = 5 \times 3$$

$$16 = 2 \times 8 = 8 \times 2 = 4 \times 4$$

$$18 = 2 \times 9 = 9 \times 2 = 3 \times 6 = 6 \times 3$$

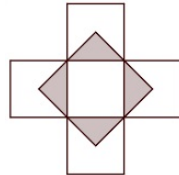
Lo que nos hace contar $2 + 4 + 2 + 2 + 3 + 4 = 17$ unos más.

De los que terminan en uno es inmediato ver que solo aparecen el 21 y el 81:

$21 = 3 \times 7 = 7 \times 3$ y $81 = 9 \times 9$, lo que añade 3 unos más.

Concluimos pues que Comenúmeros se ha zampado $16 + 17 + 3 = 36$ unos.

8. (C) A la vista de la figura tenemos que cada triangulito sombreado tiene un área que es la cuarta parte de cada uno de los cinco cuadraditos que forman la cruz griega. Luego entre los cuatro tendrán una superficie igual a la de uno de esos cuadraditos. Se deduce que nuestro cuadrado de 8 cm^2 tiene dos veces el área de un cuadradito, que será $8 : 2 = 4 \text{ cm}^2$. Por lo tanto el área de la cruz griega es $4 \times 5 = 20 \text{ cm}^2$.

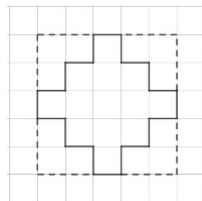


9. (D) Julián pago realmente $20 - 4,20 = 15,80 \text{ €}$

Si a esa cantidad le restamos los $3 \times 2,35 = 7,05 \text{ €}$ que pagó por los folios, tenemos que con $15,80 - 7,05 = 8,75 \text{ €}$ compró las 5 carpetas. En consecuencia cada carpeta costó: $8,75 : 5 = 1,75 \text{ €}$

- 16.(A)** Como 4 m^2 es la cuarta parte de 16 m^2 , pintará los 4 m^2 en la cuarta parte de tiempo que los 16 m^2 , es decir, los pintará en $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ hora = 30 minutos.
- 17.(E)** Si A es la edad de Ánder entonces la edad de Carlos será $A + 10$ y la suma de sus edades $2A + 10 = 22$ de donde $2A = 12$ y $A = 6$.
Por tanto la edad de Carlos será $6 + 10 = 16$ años.
- 18.(C)** En la tienda, tras la acción de Ana, hay ocho hámsters de los que dos son hembras, luego la probabilidad de escoger al azar una hembra es: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

- 19.(E)** De la figura se deduce que el perímetro de cada polígono crucigrama es igual al del cuadrado que lo “circunscribe”, como se muestra en la figura. De esta forma podemos sustituir los polígonos de la serie por cuadrados de lados: 1, 3, 5, 7, 9, ...
En consecuencia, el quinto polígono de la serie tendrá un perímetro de $4 \times 9 = 36 \text{ cm}$.



- 20.(D)** Resolución a):
Sea N el número dado por Don Retorcido. Si N fuese par, aplicando la regla tendríamos: “2 por par + 1 = impar”.
Aplicando de nuevo la regla: “3 por impar + 1 = par” y aplicándola por tercera vez: “2 por par + 1 = impar”. Dado que se llega al 208, N es necesariamente impar.
Aplicando la regla tres veces tendríamos:
 $3N + 1 = N_1$ (par); $2N_1 + 1 = N_2$ (impar); $3N_2 + 1 = 208$.
Deshaciendo el camino:
 $\frac{208-1}{3} = 69 = N_2$; $\frac{69-1}{2} = 34 = N_1$; $\frac{34-1}{3} = 11 = N$

Resolución b):
Utilizamos la estrategia de “empezar por el final”, siguiendo los pasos que pide el problema a la inversa; así:
Primero, al resultado final (208) le restamos 1 y lo dividimos entre 3 por obtener número impar: $208 - 1 = 207$; $207 : 3 = 69$.
Segundo, al resultado obtenido (69) le restamos 1 y le dividimos entre 2 por obtener número par y no múltiplo de 3: $69 - 1 = 68$; $68 : 2 = 34$.
Tercero, al resultado obtenido (34) le restamos 1 y dividimos entre tres por obtener número impar: $34 - 1 = 33$; $33 : 3 = 11$
El número que nos dio Don Retorcido es 11.

- 21.(A)** Cada banda horizontal está formada por quince triángulos más dos medios triángulos en los extremos; en total la superficie de diez y seis triángulos. Por otra parte, vemos que en cada banda está coloreada la superficie equivalente a cuatro triángulos (en unas cuatro triángulos completos y en otras tres más dos mitades). Por lo tanto la fracción coloreada será: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.
- 22.(E)** Luca le había dado 13 caramelos a Lino. Si le da uno más, Lino tiene 14 y Luca la mitad, es decir 7. Luego hay $14 + 7 = 21$ caramelos, que Luca tenía al principio.
- 23.(B)** Las diagonales de cada uno de los dos cuadrados grandes forman en el otro cuatro cuadrados, con lo que ya tenemos ocho cuadrados, que junto con los dos grades suman en total diez cuadrados.
- 24.(B)** Si con tres patadines el balón recorre la mitad que con un chutazo ($120 : 2 = 60$ m), con un patadín recorrerá la tercera parte, es decir, $60 : 3 = 20$ m.
- 25.(A)** Hacemos las operaciones en sentido inverso: $2017 + 23 = 2040$; $2040 : 6 = 34$. El número de partida era el 34 y la suma de sus cifras es 7.

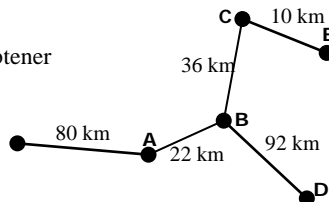
XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel II

1. (A) El menor número de cuatro cifras distintas cuyas cifras suman 20 es 1199 y el mayor es 9920, así pues la suma vale 11 119.

2. (E) Restando las distancias que nos dan es fácil obtener la longitud de cada tramo de carretera:

Para ir de D a E debemos hacer el recorrido $D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E$ que hacen un total de $92 + 36 + 10 = 138$ km.



3. (A) Como en cada cifra podemos elegir entre dos números distintos, de una cifra hay 2 números, de dos cifras $2 \cdot 2 = 4$ y de tres cifras hay $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Escribimos ahora los primeros números de cuatro cifras hasta llegar al 1121: 1111, 1112, 1121.

El 1121 ocupa la posición $2 + 4 + 8 + 3 = 17$.

4. (B) Si a Julián le devolvieron 4,20 € en total pagó $20 - 4,20 = 15,80$ €

Los tres paquetes de folios costaron $2,35 \cdot 3 = 7,05$ €, así que cada carpeta cuesta $(15,80 - 7,05) / 5 = 1,75$ €

A Ana le devolvieron $20 - (2,35 + 3 \cdot 1,75) = 20 - 7,60 = 12,40$ €

5. (B) Si en total son n hermanos y cada hermano tiene $n - 1$ hijos, el número total de hijos es $n(n - 1)$. Si a este número le sumamos los hermanos tenemos que la familia tienen $n + n(n - 1) = n^2$ miembros. El único cuadrado perfecto que hay entre 66 y 99 es 81, que es el número de miembros de la familia de Don Retorcido.

6. (E) Un capicúa de tres cifras tiene la forma aba y para que sea múltiplo de 3 la suma de sus cifras debe serlo también. Busquemos pues qué valores pueden tomar a y b para que $2a + b$ sea múltiplo de tres, teniendo en cuenta que deben ser enteros de 0 a 9 y que a no puede ser 0.

Si $a = 1$, $b = 1, 4$ o 7 ; si $a = 2$, $b = 2, 5$ o 8 y si $a = 3$, $b = 0, 3, 6$ o 9 .

Observa que si a es múltiplo de 3 hay cuatro valores posibles para b y que si a no es múltiplo de 3 hay tres posibilidades para b . Así que en total hay $3 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 30$ capicúas de tres cifras que son múltiplos de 3.

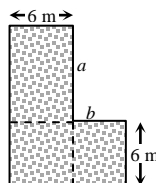
7. (B) Para acabar en tres semanas Emma debe leer cada semana 70 páginas. Si de lunes a jueves lee x páginas diarias, el viernes leerá $x - 5$ y con las 10 del domingo obtenemos la ecuación: $4x + (x - 5) + 10 = 70$ cuya solución es $x = 13$. ¡Ojo! 13 son las páginas que lee de lunes a jueves, pero nos preguntan cuántas lee el viernes que son $13 - 5 = 8$.

8. (D) Observamos que el 0, 6, 7 y 8 deben ocupar las posiciones de las unidades. El 5 solo puede ocupar la posición de las decenas con el 0 en las unidades y, para que no haya números consecutivos el 2 tendrá que ir con el 6 y el 8. Así pues, los números son: 26, 28, 47 y 50 y la suma del mayor y el menor es $50 + 26 = 76$.

9. (A) La suma de los puntos de las seis caras de un dado es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Como hay 4 dados, todos los puntos sumarán $4 \cdot 21 = 84$ y como hay 30 puntos visibles, en total hay $84 - 30 = 54$ no visibles.

10.(A) Llamando a y b a los lados que ves en la figura y usando el dato del área obtenemos que $6a + 36 + 6b = 120$ por lo que $a + b = 14$. Como no tenemos más datos, no vamos a poder calcular cuánto valen a y b , pero con saber el valor de la suma tenemos suficiente.

El perímetro de la L es: $6 + a + b + 6 + (b + 6) + (6 + a) = 2a + 2b + 24 = 2(a + b) + 24 = 2 \cdot 14 + 24 = 52$ m.



11.(C) Calculemos cada una de ellas atendiendo al orden de las operaciones:

A) $5 - 1 : 2 = 5 - 0,5 = 4,5$

B) $2,46 + 3,64 = 6,1$

C) $5 \cdot (1,2 - 2,4) = 5 \cdot (-1,2) = -6$

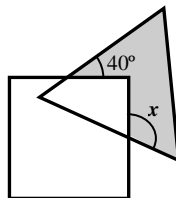
D) $0,25 \cdot 42 = 10,5$

E) $\sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} \approx 9,5$

Así pues, la única operación que da como resultado un número entero es C).

12.(B) Fíjate en el pentágono gris. La suma de sus ángulos debe ser $180^\circ \cdot (5 - 2) = 540^\circ$.

Así pues, $40^\circ + 60^\circ + 60^\circ + x + 270^\circ = 540^\circ$ y, por lo tanto, $x = 540^\circ - 430^\circ = 110^\circ$.



13.(C) Reconstruyamos la serie poco a poco:



Como $-2 = a + 15 + (-6)$ entonces $a = -11$.

Como $-6 = b + (-11) + 15$ entonces $b = -10$.

Como $15 = c + (-10) + (-11)$ entonces $c = 36$.

Como $-11 = d + 36 + (-10)$ entonces $d = 15$.

Como $-10 = e + 15 + 36$ entonces $e = -61$.

Y por fin, como $36 = f + (-61) + 15$, entonces el número que se comió Comenúmeros en último lugar fue el 82.

- 14.(A) Si vamos poco a poco fijándonos en la tabla, todos podemos **Delitar**:
 $\{1 \Delta [(2 \Delta 3) \Delta 4]\} \Delta 5 = \{1 \Delta [2 \Delta 4]\} \Delta 5 = \{1 \Delta 5\} \Delta 5 = 3 \Delta 5 = 5$.

- 15.(E) Como el área es 144 cm^2 , los lados del cuadrado miden 12 cm .

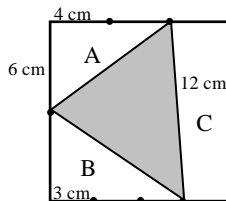
En lugar de calcular el área del triángulo vamos a calcular el área de cada zona blanca y después restaremos.

A es un triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 y, por lo tanto, su área es 24 cm^2 .

B es un triángulo rectángulo de catetos 6 y 9 y, por lo tanto, su área es 27 cm^2 .

C es un trapecio rectángulo de bases 3 cm y 4 cm y altura 12 cm y, por lo tanto, su área es $\frac{3+4}{2} \cdot 12 = 42 \text{ cm}^2$.

Así pues, el área del triángulo gris es $144 - (24 + 27 + 42) = 51 \text{ cm}^2$.



- 16.(E) Observa que los números que ocupan posiciones pares en la secuencia son potencias de 2 : $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots$ y el número que está delante es una potencia de 2 menos 1 . Las primeras potencias de 2 son: $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots$ así que el único número que aparecerá es $1024 - 1 = 1023$.

- 17.(B) En total hay $18 \cdot 12 \cdot 10 - 6^3 = 6^3 \cdot 10 - 6^3 = 6^3 \cdot 9 \text{ m}^3$ de agua. Como el área de la base de la piscina es $18 \cdot 12 = 6^3 \text{ m}^2$, el agua llegará a una altura de 9 m .

- 18.(D) Como $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, solo hay cuatro posibilidades:

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y la suma de los factores es 10 .

$30 = 1 \cdot 2 \cdot 15$ y la suma de los factores es 18 .

$30 = 1 \cdot 3 \cdot 10$ y la suma de los factores es 14

$30 = 1 \cdot 5 \cdot 6$ y la suma de los factores es 12 .

El número que sobra es el 16 .

- 19.(A) Para calcular las probabilidades escribamos todos los casos favorables.

$P = \text{"que salga par o múltiplo de } 5\text{"} = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15\}$.

La probabilidad de P es $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

$Q = \text{"que salga impar"} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$. La probabilidad de Q es $\frac{8}{15}$.

$R = \text{"que salga múltiplo de } 3 \text{ o que acabe en } 0\text{"} = \{3, 6, 9, 10, 12, 15\}$. $p(R) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

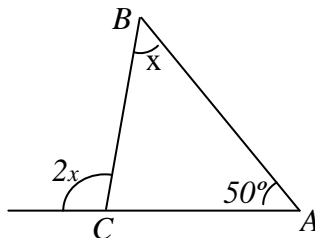
Como $\frac{6}{15} < \frac{8}{15} < \frac{9}{15}$, el orden es RQP.

- 20.(D)** El cuadrado tiene 30 palitos de lado así que para hacerlo necesitará $30 \cdot 4 = 120$ palillos. Para el palito vertical necesita 31 palillos y para el inclinado 30. En total usó $120 + 31 + 30 = 181$ palillos.
- 21.(D)** Pongamos los paréntesis en todas las que se nos ocurra y si solo nos queda una habremos terminado:
A) $2 \cdot (3+1) \cdot 5 = 40$ **B)** $7 - (2-1) = 6$ **C)** $(4+3) \cdot 2 = 14$ **E)** $4 \cdot (1+2+3) = 24$
D) $-2 \cdot 3 - 5 = -4$ es la única cuenta para la que no se me ocurre nada.
- 22.(B)** El 42% de 37 lados son $(42 \cdot 37) / 100 = 15,54$. Así pues, Caracolito ha recorrido 15 lados completos (y más de la mitad de otro).
- 23.(B)** Para hacer las cuentas fáciles, supongamos que los lados del cuadrado inicial miden 100 unidades (cm, palmos, Da igual).
Tras el paso de Sara los lados horizontales miden 120 unidades y los verticales 80. Ahora viene Julia que deja los horizontales a $0,8 \cdot 120 = 96$ unidades y los verticales a $1,2 \cdot 80 = 96$ unidades.
Así que al final queda un cuadrado un poco más pequeño que el inicial.
- 24.(C)** Tras observar un rato la resta me he dado cuenta de que la resta que da el menor resultado positivo es $963 - 961 = 2$. Así que la suma de los números que se ha comido nuestro amigo es $7 + 5 + 1 + 4 + 7 + 8 = 32$.
- 25.(E)** El número tiene que ser de la forma $\boxed{a+3} \boxed{a}$ con a y $a+3$ números de dos cifras.
Como $a+3$ debe ser mayor que 9, a debe ser mayor que 6 y como $a+3$ debe ser menor de 100, a debe ser menor que 97. Así que hay 90 valores posibles para a : del 7 al 96.

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel III

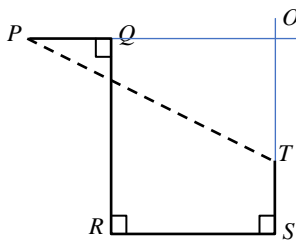
1. (B) $2x$ y $x + 50^\circ$ son suplementarios del ángulo \hat{C} del triángulo, y por tanto son iguales. Así, $2x = x + 50^\circ$, luego $x = 50^\circ$.



2. (C) Si pasa por los puntos $A(2, 7)$ y $B(a, 3a)$ la pendiente es $\frac{3a-7}{a-2} = 2$, y por tanto, $3a - 7 = 2(a - 2)$, de donde $a = 3$.

3. (E) Alargamos las líneas PQ y TS hasta encontrarse en O . Como $PQ = 4$ y $RS = 8$, entonces $PO = 12$. Como $QR = 8$ y $ST = 3$, $OT = 5$.

La distancia de P a T es $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.



4. (C) $\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{4}{24} = \frac{6}{36} = \frac{8}{48} = \frac{10}{60}$; $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{6}{24} = \frac{9}{36} = \frac{12}{48} = \frac{15}{60}$. Solo $\frac{5}{24}$ está comprendida entre las dos fracciones.

5. (A) $N = 10^{100} \cdot 100^{10} = 10^{100} \cdot 10^{20} = 10^{120}$. El 1 está seguido de 120 ceros.

6. (E) $\text{mcm}(20, 16 \text{ y } 2016) = 2016 \cdot 5 = 10\,080$ (empleamos que el mcm debe ser múltiplo de 2016 y deberemos añadirle los factores primos novedosos en 20 y 16, pero como $2016 = 2000 + 16$ es múltiplo de 16, solo debemos aportar un 5).

7. (E) Si sumamos a su vez las sumas por parejas, $998 + 1050 + 1234 = 3282$, habremos sumado los tres números dos veces, luego la suma de los tres será la mitad, 1641. Si a la suma de los tres le quitamos cada una de las sumas por parejas obtenemos los números por separado.
El mayor es, $1641 - 998 = 643$ y el menor, $1641 - 1234 = 407$. La diferencia de ambos es 236.

8. (D) El primer mensajero enviado de vuelta al castillo llega al castillo hora y media después de haber salido (en la primera hora, acompañando al rey recorrió 5 km, y luego los tuvo que hacer de vuelta, empleando en ello media hora). De igual forma el mensajero n acompaña al rey durante $5n$ km, y luego los recorre de vuelta, tardando en total $\left(n + \frac{n}{2}\right)$ horas.

La diferencia en horas entre el mensajero n y el $(n - 1)$, es de hora y media.

9.(D) Si el producto final es 36 y uno de ellos es 3, el producto de los dos dígitos no borrados es 12. Doce puede ser expresado como producto de dos dígitos como $3 \cdot 4$ o como $2 \cdot 6$. Pero los tres dígitos finales son también distintos y eso excluye que sean, 3, 4 y 3. Así los dos no borrados son 2 y 6 y el tercero 7.

10. (B) Si la media de, 4, a , b y 22 es 13, su suma es 52 y así $a + b = 26$. Pero por el orden entre ellos y por ser enteros, $5 \leq a < b \leq 21$. Empezamos en la pareja (5, 21) y acabamos en la (12, 14). Luego hay $12 - 5 + 1 = 8$ posibles parejas.

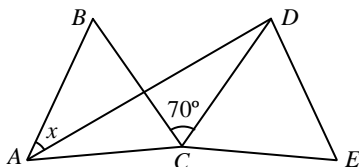
11. (B) Si $\frac{x-y}{x+y} = 9$ y $\frac{x \cdot y}{x+y} = -60$, cambiando $x + y$ por a , tendremos que:

$$\begin{cases} x - y = 9a \\ x \cdot y = -60a \end{cases} \text{ y también } \begin{cases} x - y = 9a \\ x + y = a \end{cases}, \text{ de donde } x = 5a, y = -4a.$$

Así, $x \cdot y = -20a^2 = -60a$, y así $a = 0$ (no vale ya que a de partida aparece como denominador) o $a = 3$.

De resultas, $x = 15, y = -12$ y $(x + y) + (x - y) + (x \cdot y) = 3 + 27 - 180 = -150$.

12. (D) Aparece como triángulo clave el ACD , que es isósceles y cuyo ángulo distinto mide $70^\circ + 60^\circ$, luego los iguales son de 25° . Así x resulta ser, $60^\circ - 25^\circ = 35^\circ$.



13. (D) Escribimos en forma de radical los diferentes números:

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{17} = \sqrt{340}; \quad \sqrt{20} \cdot 17 = \sqrt{5780}; \quad 20 \cdot \sqrt{17} = \sqrt{6800}; \quad \sqrt{201} \cdot 7 = \sqrt{9849}; \quad \sqrt{2017}$$

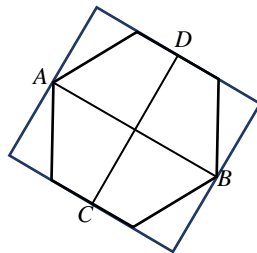
El más grande es el cuarto.

El problema podría ser resuelto con un pequeño cálculo mental:

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{17}, \text{ está entre } 16 \text{ y } 25; \quad \sqrt{20} \cdot 17, \text{ está entre } 68 \text{ y } 85; \quad 20 \cdot \sqrt{17}, \text{ está entre}$$

$$80 \text{ y } 100; \quad \sqrt{201} \cdot 7, \text{ está entre } 98 \text{ y } 105; \quad \sqrt{2017} \text{ está entre } 44 \text{ y } 45.$$

14. (B) Las líneas AB y CD son perpendiculares, y así su producto equivale al área del rectángulo que hemos circunscrito al hexágono regular. El hexágono puede ser dividido en seis triángulos equiláteros iguales y el rectángulo equivale a ocho de ellos. Si el área del hexágono es 60, la del rectángulo es 80.



15. (D) Si hay m chicos y n chicas, y p y q son las notas medias respectivas de ambos grupos, tenemos que $\frac{m \cdot p + n \cdot q}{m+n} + 1,2 = \frac{m \cdot (p+3) + n \cdot q}{m+n}$. Quitando denominadores nos queda, $(m \cdot p + n \cdot q) + 1,2(m+n) = m(p+3) + n \cdot q$, y operando tendríamos que, $(m+n) \cdot 1,2 = 3m$; $1,2 \cdot n = 1,8 \cdot m$, y así $\frac{n}{m} = \frac{3}{2}$, y $\frac{n}{m+n} = \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5} = 60\%$

16. (C) La suma $1 + 2 + 3 + \dots + n$ es igual a $\frac{(n+1) \cdot n}{2}$ (la mitad del producto de un natural por su consecutivo). Si queremos que se aproxime a 1000 tendremos que buscar un natural tal que su cuadrado se aproxime a 2000. Hallamos la raíz cuadrada de 2000 que es 44 y pico. El cuadrado de 44 es 1936 y si le sumamos 44 no llega a 2000 (sin embargo el cuadrado de 45 pasa ya de 2000).

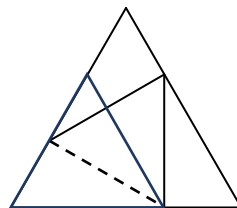
17. (D) Para hallar el número de divisores de un número se descompone en factores primos y se hace el cálculo de coger los exponentes de los factores primos diferentes, aumentarlos en una unidad y multiplicarlos. Como buscamos números menores que 100, estos pueden tener hasta seis doses, no más de cuatro treses, a lo más dos cincos, o dos setes. Por tamaño es mejor tener al menos tantos doses como treses, o tantos treses como cincos o setes. Como $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ pasa de 100 vamos a partir de dos doses y ver como los acompañamos. 2^6 tiene 7 divisores; $2^5 \cdot 3$ tiene 12 divisores; $2^4 \cdot 3$ y $2^4 \cdot 5$ tienen 10 divisores; $2^3 \cdot 3^2$ tiene 12 divisores; $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ tienen 12 divisores.

18. (C) Conviene darse cuenta que el lado del pequeño es altura de un triángulo equilátero, que está en proporción lineal de 2:3 con el triángulo

mayor. Si 12 es la altura, el lado es $\frac{24}{\sqrt{3}}$ (solución

positiva de $12^2 = m^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$), y el lado buscado es

$$\frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = 12\sqrt{3} .$$



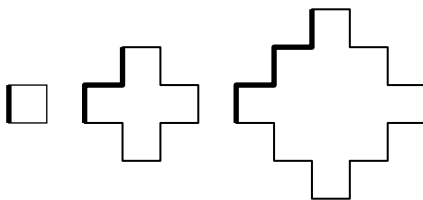
19. (C) $\begin{cases} a + \sqrt{2} b = \sqrt{2} \\ \sqrt{2} a + b = \sqrt{2} \end{cases}$. El sistema es lineal, simétrico y de solución única, luego $a = b$.

Por lo tanto $a + \sqrt{2} a = \sqrt{2}$, y así $a = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} = 2 - \sqrt{2}$.

20. (C) Empezamos la búsqueda:

$2017 = 2016 + 1$, ($\sqrt{2016}$ está entre 44 y 45); $44^2 + 9^2 = 1936 + 81 = 2017$ (esta es la suma buscada). Las bases son 44 y 9 y su suma es 53..

21. (E) El primer cuadrado tiene 4 cm de perímetro. El segundo 12 y el tercero 20. Los perímetros van aumentando de 8 en 8 (son, en cm, cuatro veces los palitos de la escaleras dibujadas en línea gruesa) y por tanto siguen una fórmula $8n + b$.

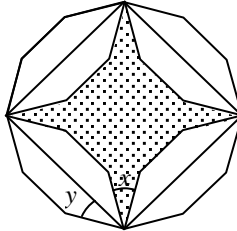


Para hallar b , basta con ajustar la fórmula para $n = 1$. $8 \cdot 1 + b = 4 \Rightarrow b = -4$ y $a - b = 12$.

22. (C) Para que se conserven las dos últimas cifras debe conservarse la última. Al elevar al cuadrado se conservan las terminaciones, 0, 1, 5, y 6. Como hablamos de terminaciones de dos cifras en una multiplicación, podemos restringirnos a números de dos cifras. La terminación 00 es la única acabada en 0 que se conserva al cuadrado. La penúltima cifra de $(n \cdot 10 + 1)^2 = n^2 \cdot 100 + 20n + 1$, es la final de $2n$, y solo coinciden si $n = 0$. La terminación de dos cifras de $(n \cdot 10 + 5)^2$ es 25. La penúltima cifra de $(n \cdot 10 + 6)^2$ es la última de $2n + 3$, y solo coinciden si $n = 7$. Así que se conservan al elevar al cuadrado las terminaciones, 00, 01, 25 y 76.

23. (D) El ángulo del dodecágono regular mide $180^\circ - \frac{360^\circ}{12} = 150^\circ$.

El ángulo "y" mide la mitad de $150^\circ - 90^\circ$, es decir 30° . El ángulo x mide $150^\circ - 4y$ es decir 30° .

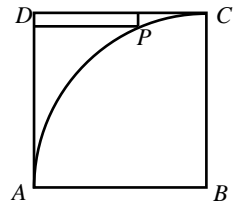


24. (C) El número $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$ es múltiplo de 4, y no de 8. Al dividir por 8 el resto es 4.

25. (E) Sea r el lado del cuadrado.

Así, $PB^2 = r^2 = (r-1)^2 + (r-8)^2$. Y trabajando en la ecuación, llegamos a $r^2 - 18r + 65 = 0$, cuyas soluciones son 5 y 13.

La solución 5 no es posible, ya que es inferior a 8.



XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (D) Al aparecer en el enunciado $\log_2(-x)$, x debe ser negativo, pero como también aparece $\log_2\sqrt{x-1}$, $x-1$ sería, en ese caso, negativo, por lo que no hay ningún número real solución de la ecuación.

2. (C) Como $2^x = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{n}}$, tenemos $2^{x \cdot n} = 2^{-3} \Rightarrow x \cdot n = -3$.

3. (E) El mayor factor primo que puede tener cualquier número de los buscados es 23, pues si aparece el siguiente primo, 29, resultaría que el menor número producto de tres primos, uno de cuyos factores sea 29, es $2 \cdot 2 \cdot 29$, que es mayor que 100.

Así pues, hay que ver cuántos números menores que 100 son producto de tres primos de la lista: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

La mejor forma de contarlos es ir escribiendo ordenadamente tres factores, de forma que cada factor sea mayor o igual que el que está a su izquierda.

$$2 \cdot 2 \cdot 2, 2 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 2 \cdot 7, \dots, 2 \cdot 2 \cdot 23 \quad (9 \text{ números})$$

$$2 \cdot 3 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, \dots, 2 \cdot 3 \cdot 13 \quad (5 \text{ números})$$

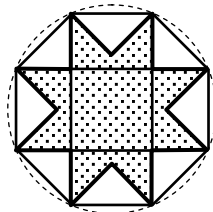
$$2 \cdot 5 \cdot 5, 2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 7 \cdot 7 \quad (3 \text{ números})$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3, 3 \cdot 3 \cdot 5, 3 \cdot 3 \cdot 7, 3 \cdot 3 \cdot 11, 3 \cdot 5 \cdot 5 \quad (5 \text{ números})$$

En total obtenemos 22 números.

4. (A) Una forma cómoda es restar al área del octógono la suma de las áreas de los ocho triángulos rectángulos isósceles blancos.

Al trazar las cuatro diagonales que se indican en la figura adjunta, el octógono se descompone en: un cuadrado de lado 4, cuatro triángulos rectángulos isósceles de catetos $2\sqrt{2}$ y cuatro rectángulos de lados 4 y $2\sqrt{2}$.



Así pues, el área pedida es: $4^2 + 4(4 \cdot 2\sqrt{2}) + 4\left(\frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2\right) - 8\left(\frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2\right) = 32\sqrt{2}$.

5. (A) Al ser $z = 1_{45^\circ}$, resulta que $z^4 = -1$ y que $z^5 = -z$, $z^6 = -z^2$, $z^7 = -z^3$, $z^8 = -z^4$.

Así que la suma pedida es: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 - z - z^2 - z^3 - z^4 = 1$.

6. (D) La suma pedida es $S = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2 \cdot 10 + \dots + 9 \cdot 10$ y utilizando el hecho de que: $(1 + 2 + \dots + 10)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 + 2 \cdot S$, resulta que:

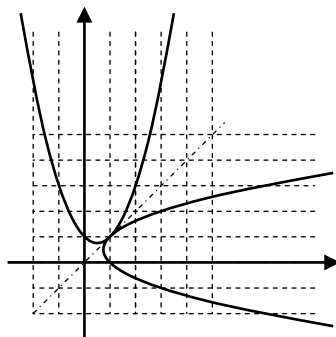
$$55^2 = 385 + 2S \Rightarrow S = \frac{1}{2}(55^2 - 385) = 1320.$$

7. (D) Efectuando la división obtenemos $\frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 2} = 3x + 1 + \frac{3}{x - 2}$, por lo que la recta $y = 3x + 1$ es asíntota de dicha gráfica.

8. (B) Si (x, y) es solución del sistema, restando, obtenemos: $y - x = x^2 - y^2 - x + y$, es decir $x^2 = y^2$. Así pues:

- Si $x = y$ en la primera ecuación obtenemos $x = x^2 - x + 1 \Rightarrow x = 1$, es decir, la solución es $(1, 1)$.
 - Si $x = -y$ resulta en dicha ecuación $-x = x^2 - x + 1 \Rightarrow x^2 = -1$ sin solución real.
- Por lo tanto la única solución del sistema es $(1, 1)$.

Representando gráficamente las dos parábolas, simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, se observa claramente que la solución única es $(1, 1)$.



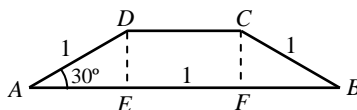
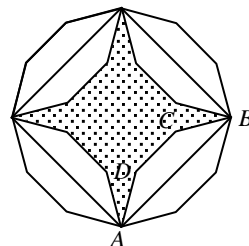
9. (A) Restamos al área del cuadrado inscrito la suma de las áreas de los cuatro trapecios isósceles (en blanco). Como el ángulo interior de un dodecágono regular es 150° , el ángulo agudo de cada trapecio es 30° , así que su base mayor, que es el lado AB del cuadrado, es:

$$AB = AE + EF + FB = 1 + 2(1 \cdot \cos 30^\circ) = 1 + \sqrt{3}$$

y su altura $DE = 1 \cdot \text{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto el área de la estrella es:

$$(1 + \sqrt{3})^2 - 4 \cdot \frac{1 + \sqrt{3} + 1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$



10. (B) En cada sorteo la probabilidad de no llevarme premio es $\frac{9}{10}$ y al jugar n sorteos la probabilidad de no obtener premio en ninguno es $\left(\frac{9}{10}\right)^n$, por lo que la probabilidad

de llevarme premio es $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n$. Como nos piden encontrar el menor n para que

$$1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 9^n < 10^n.$$

$$\text{Si } n = 4, \quad 2 \cdot 9^4 = 2 \cdot 81^2 > 2 \cdot 80^2 = 2 \cdot 6400 = 12\,800 > 10^4$$

$$\text{Si } n = 5, \quad 2 \cdot 9^5 = 2 \cdot 59049 > 10^5. \quad \text{Si } n = 6, \quad 2 \cdot 9^6 = 2 \cdot (9^3)^2 = 2 \cdot 729^2 = 1062882 > 10^6.$$

Pero si $n = 7$, $2 \cdot 9^7 = 9\,565\,938 < 10^7$. Así que jugando 7 veces tengo probabilidad mayor que $\frac{1}{2}$ de llevarme premio.

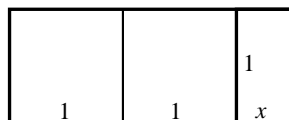
11. (B) Si $z_1 = 2 + 3i = (\sqrt{13})_{\beta}$ es una raíz cuarta de $z = 169_{4\beta}$ entonces también lo serán

$$z_2 = (\sqrt{13})_{\beta+90^\circ} = z_1 \cdot 1_{90^\circ} = (2 + 3i) \cdot i = -3 + 2i, \quad z_3 = z_1 \cdot 1_{180^\circ} = (2 + 3i) \cdot (-1) = -2 - 3i$$

$$\text{y } z_4 = z_1 \cdot 1_{270^\circ} = (2 + 3i) \cdot (-i) = 3 - 2i.$$

De las propuestas solamente $3 - 2i$ es solución.

12. (B) Llamando x a la longitud del menor de los lados del rectángulo pequeño, resulta que el lado largo del rectángulo original es $2 + x$ y por semejanza tenemos, $\frac{2+x}{1} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$ cuyas soluciones

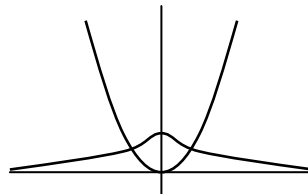


son $x = -1 \pm \sqrt{2}$ y solo la positiva, $x = -1 + \sqrt{2}$ tiene sentido.

Por lo tanto la longitud del lado pedido es $2 + (-1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$.

13. (C) Esbozando las gráficas de ambas funciones vemos que hay dos puntos de corte.

También podríamos haber llegado a esa conclusión resolviendo el sistema formado con las ecuaciones de las dos funciones.

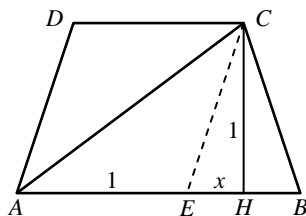


14. (B) Trazando el segmento CE paralelo a DA y la altura CH , como muestra la figura, podemos tomar $DC = CH = AE$ como la unidad y llamar x al segmento EH .

En este caso la diagonal es $AC = AB = 1 + 2x$ y en el triángulo rectángulo AHC se verifica que,

$$(1+2x)^2 = (1+x)^2 + 1^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ cuyas}$$

soluciones son $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{3}$ y solo tiene



sentido la positiva. Por lo tanto $AB = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ y $\frac{AB}{DC} = \frac{\frac{5}{3}}{1} = \frac{5}{3}$.

15. (A) Escribiendo $f(x) = \frac{\text{sen}^3 x \cdot \cos x}{1 + \text{tg}^2 x}$ como

$$f(x) = \frac{\text{sen}^3 x \cdot \cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \text{sen}^3 x \cdot \cos^3 x = \frac{1}{8} (2 \text{sen} x \cos x)^3 = \frac{1}{8} (\text{sen} 2x)^3 \text{ podemos}$$

observar que el máximo de la función se alcanza cuando $\text{sen} 2x = 1$ y en este caso,

$$\text{Máx}(f(x)) = \frac{1}{8}.$$

16. (A) Al lanzar 6 dados, distinguibles, hay $VR_6^6 = 6^6$ casos posibles que puede presentar la cara superior de los 6 dados. De todas estas posibilidades hay $P_6 = 6!$ casos en los que las caras superiores son distintas, así que la probabilidad pedida es,

$$p = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6^6} = \frac{20}{6^4} = \frac{20}{1296} < \frac{20}{1000} = 0,02.$$

17. (A) Con la primera igualdad podemos escribir que $(x+y)^2 = 84 + xy$ y con la segunda $(x+y)^2 = 36 + xy + 12\sqrt{xy}$.

Iguando ambas expresiones se obtiene $84 + xy = 36 + xy + 12\sqrt{xy}$ y de aquí

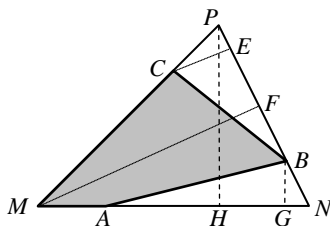
$$12\sqrt{xy} = 48 \Rightarrow \sqrt{xy} = 4 \Rightarrow xy = 16.$$

18. (D) Llamando S al área del triángulo MNP la del triángulo ANB será $\frac{3}{16}S$ ya que su base

$$AN = \frac{3}{4}MN \text{ y su altura } BG = \frac{1}{4}PH.$$

Análogamente $S_{PCB} = \frac{3}{16}S$ puesto que

$$BP = \frac{3}{4}NP \text{ y } CE = \frac{1}{4}MF.$$



Restando al área del triángulo MNP la de los triángulos ANB y PCB obtenemos el

$$\text{área del cuadrilátero } MABC. S_{MABC} = S - \frac{3}{16}S - \frac{3}{16}S = \frac{5}{8}S$$

19. (A) Consideramos los sucesos

B_1 : “La primera bola extraída es blanca”

B_2 : “La segunda bola extraída es blanca”

N_1 : “La primera bola extraída es negra”

Entonces $p(B_2) = p[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)] = p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap B_2)$.

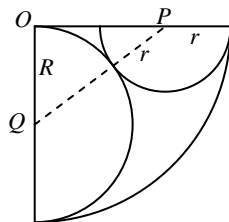
$$p(B_2) = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m+k}{m+n+k} + \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n+k} = \frac{m(m+n+k)}{(m+n)(m+n+k)} = \frac{m}{m+n}$$

20. (E) Sean P y Q los centros de las dos semicircunferencias que están alineados, obviamente, con el punto de tangencia.

Como el radio del cuadrante es 4 entonces $R = PQ = 2$.

En el triángulo rectángulo OPQ , $PQ^2 = OQ^2 + OP^2$ es

$$\text{decir, } (2+r)^2 = 2^2 + (4-r)^2 \Rightarrow 6r = 4 \Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

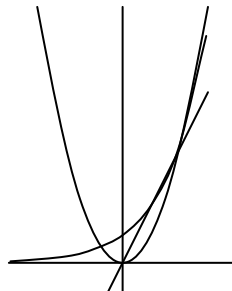


21. (E) Con la ayuda de las gráficas de las funciones podemos decir que:

1: tiene soluciones en $(2, 3)$, 2: tiene soluciones en $(0, 1)$

4: tiene soluciones en $(-3, -2)$, 6: tiene soluciones en $(9, 10)$

pero en cambio las desigualdades 3 y 5 no se verifican para ningún número real.



22. (A) $10 - 3\sqrt{11} = \frac{100 - 99}{10 + 3\sqrt{11}} = \frac{1}{10 + 3\sqrt{11}}$; $8 - 3\sqrt{7} = \frac{1}{8 + 3\sqrt{7}}$; $5 - 2\sqrt{6} = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$

$9 - 4\sqrt{5} = \frac{1}{9 + 4\sqrt{5}}$; $7 - 4\sqrt{3} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}$. La menor será aquella que tenga el mayor denominador.

Son claras las desigualdades $10 + 3\sqrt{11} > 8 + 3\sqrt{7} > 5 + 2\sqrt{6}$ y $9 + 4\sqrt{5} > 7 + 4\sqrt{3}$ entonces solo falta comprobar cuál es mayor si $10 + 3\sqrt{11}$ o $9 + 4\sqrt{5}$.

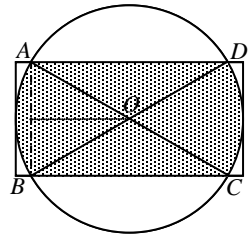
$10 + 3\sqrt{11} > 10 + 3\sqrt{9} = 19$.

$9 + 4\sqrt{5} < 9 + 4\sqrt{6,25} = 9 + 4 \cdot 2,5 = 19$ luego

$10 + 3\sqrt{11} > 19 > 9 + 4\sqrt{5}$ y se concluye que el número menor es $10 - 3\sqrt{11}$.

23. (A) El triángulo AOB es equilátero de lado $AO = 6$, por lo que el ángulo $A\hat{O}B = 60^\circ$. La figura se compone de dos sectores circulares de 60° de amplitud y dos triángulos isósceles, ADO y BCO .

La altura del triángulo equilátero de lado 6 es $3\sqrt{3}$ por lo que $AD = 6\sqrt{3}$ y el área del triángulo ADO es $\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$.



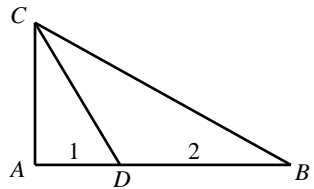
El área del sector circular es $\frac{1}{6} \pi 6^2 = 6\pi$.

Así pues, el área pedida es: $2(6\pi + 9\sqrt{3}) = 12\pi + 18\sqrt{3}$.

24. (C) El teorema de la bisectriz nos dice que $\frac{CA}{AD} = \frac{CB}{DB}$

es decir, si $a = AC$, $\frac{a}{1} = \frac{CB}{2} \Rightarrow CB = 2a$.

Entonces, en ABC , $4a^2 = a^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 = 3$. y en ADC , $CD^2 = a^2 + 1^2 = 4 \Rightarrow CD = 2$.



25. (D) Tomando $AD = 1$ entonces $DC = 4$ y $AC = 5$.
 Los triángulos CDF y CAB son semejantes con
 razón de semejanza $k = \frac{DC}{AC} = \frac{4}{5}$ y razón de las

$$\text{áreas } k^2 = \frac{16}{25}.$$

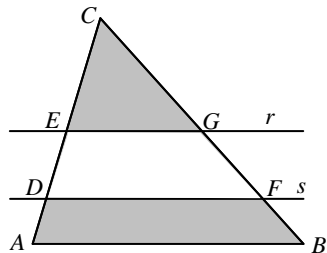
Luego $S_{CDF} = \frac{16}{25}S_{CAB}$ y el área del trapecio

$ABFD$ es $\frac{9}{25}S_{CAB}$ que es el área del triángulo CEG .

Los triángulos CEG y CAB también son semejantes y la razón de sus áreas es $\frac{9}{25}$

luego la razón de semejanza es $\frac{3}{5}$. Esto nos indica que $\frac{CE}{CA} = \frac{3}{5}$ y como $CA = 5$

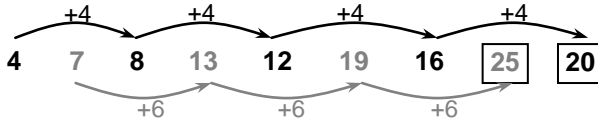
entonces $CE = 3$ y $EA = 2$. Como consecuencia $\frac{CE}{EA} = \frac{3}{2}$.



XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel I

1. (D) En la serie, los números pares se obtienen sumando 4 al número par anterior; los números impares se obtienen sumando 6 al anterior número impar; de esta forma los dos números siguientes de la serie son: 25 y 20
 $19 + 6 = 25$; $16 + 4 = 20$



2. (D) Un metro tiene 100 centímetros. $100 : 2 = 50$ trozos de 2 centímetros. Cada corte proporciona un trozo de 2 cm y en el corte 49 obtiene dos trozos de 2 cm. La cinta queda cortada en 49 días.
3. (B) En la recta dibujada se obtienen 15 segmentos. Son los siguientes: AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF y EF
 Una tabla de doble entrada como la que se muestra facilita el conteo de segmentos.

	A	B	C	D	E	F
A		AB	AC	AD	AE	AF
B			BC	BD	BE	BF
C				CD	CE	CF
D					DE	DF
E						EF
F						

4. (D) La miel pesa el doble que la leche, entonces, leche + leche + tarro = 500 g
 Como la leche más el tarro pesan 350 g, se deduce que la leche pesa:
 $500 - 350 = 150$ g
 El tarro pesa $350 - 150 = 200$ g
5. (A) Primero, calculamos el número de cifras que tiene el libro de 86 páginas.
 - Número de cifras de las páginas 1 a 9..... 9 cifras
 - Número de cifras de las páginas 10 a 79.....140 cifras
 - Número de cifras de las páginas 80 a 86.....14 cifras
 TOTAL: 163 cifras
 Después, contamos los números que contienen la cifra 7. En estos 17 números: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78 y 79, hay 18 setes.:
 Por último, restamos 18 al número total de cifras.
 $163 - 18 = 145$ cifras comió Comenúmeros.

6. (C) Solo se pueden construir triángulos que cumplan que la longitud de cada lado de un triángulo tiene que ser mayor que la diferencia de las longitudes de los otros dos lados y menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.
Con estas condiciones y con los datos dados se pueden construir siete triángulos cuyos lados medirán: a) 3, 3 y 3; b) 3, 3 y 5; c) 3, 5 y 5; d) 5, 5 y 5; e) 10, 10 y 10; f) 10, 10 y 3; g) 10, 10 y 5.

7. (D) Primero, se expresa en gramos el peso del cordero: $3 \text{ kg } 600 \text{ g} = 3600 \text{ g}$
Después, se calcula la pérdida de peso durante el asado:

$$\frac{2}{3} \text{ de } 3.600 = \frac{2}{3} \cdot 3600 = 2400 \text{ g}$$

Por último, se calcula la cantidad que comió cada uno de los afortunados:

$$2400 : 8 = 300 \text{ g}$$

María comió 300 gramos de cordero.

8. (D) Para los escolares de Primaria, se sugiere que la resolución del problema se proponga de forma experimental y que no se utilicen contenidos de combinatoria.

Al lanzar cuatro dados cuya suma de puntos sea 15 se obtienen estos once resultados:

- a) 6 - 6 - 2 - 1; b) 6 - 5 - 3 - 1; c) 6 - 5 - 2 - 2; d) 6 - 4 - 4 - 1;
e) 6 - 4 - 3 - 2; f) 6 - 3 - 3 - 3; g) 5 - 5 - 4 - 1; h) 5 - 5 - 3 - 2;
i) 5 - 4 - 4 - 2; j) 5 - 4 - 3 - 3; k) 4 - 4 - 4 - 3.

9. (E) Se busca el múltiplo de 8 y de 5 comprendido entre 100 y 150.

El múltiplo de 8 y de 5 mayor que 100 y menor que 150 es 120. Dilo comió 120 peces. Oso comió: $120 : 8 = 15$ peces.

Restando 15 a 120 se halla el número de peces que comió Dilo más que Oso.

$120 - 15 = 105$ peces comió más Dilo que Oso

10. (C) La suma actual de las edades de los cuatro hijos del señor Carpanta se calcula restando cinco a 50 por cada hijo:

$$50 - 5 \times 4 = 50 - 20 = 30$$

La suma actual de las edades de los cuatro hijos es 30. Dentro de dos años la suma de sus edades será: $30 + 2 \times 4 = 30 + 8 = 38$.

11. (A) El perímetro de un rectángulo es igual a dos veces la suma de las longitudes de la base y de la altura: $p = 2 \times (b + a)$. Por lo tanto $b + a = 12$ palillos.

Se pueden formar seis rectángulos de longitudes cuyas dimensiones son:

base	1	2	3	4	5	6
altura	11	10	9	8	7	6

12. (C) La diferencia que marcan los dos relojes de cada hora es de 20 segundos.

Una hora tiene $60 \times 60 = 3600$ segundos. $3600 : 20 = 180$ horas

Tienen que pasar 180 horas

13. (C) Primero, calculamos el área de la parte sombreada de cada una de las figuras, para ello lo mejor es restar a la superficie del cuadrado la de los triángulos en blanco.

Figura A = $36 - (3 + 1,5 + 6 + 7,5) = 36 - 18 = 18$ u.c.

Figura B = $36 - (6 + 5 + 6) = 36 - 17 = 19$ u.c.

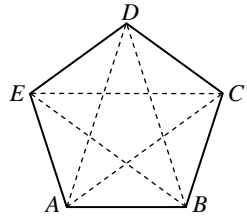
Figura C = $36 - (6 + 3 + 3 + 6) = 36 - 18 = 18$ u.c.

La única afirmación cierta es la C

14. (E) Se pueden formar 10 triángulos que son los siguientes:

$ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE$.

(Para no olvidar o repetir alguno, están ordenados alfabéticamente)

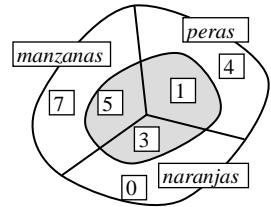


15. (D) La altura de la matrioska más pequeña es igual a:

$$16 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{81}{16} = 5,0625 \text{ cm} = 50,625 \text{ mm} \cong 50 \text{ mm}$$

16. (C) De las 9 frutas podridas que hay en la cesta, 5 son manzanas, 3 naranjas y, por tanto, 1 pera. Además, 9 frutas podridas + 7 manzanas sanas = 16 frutas. Faltan 4 frutas para completar las 20, que necesariamente tienen que ser peras para que su número sea mayor que el de naranjas. En la cesta hay 5 peras, 4 sanas y 1 podrida.

El esquema aclara la situación.



17. (B) Número de calcetines que hay en el cajón: $10 + 12 + 8 + 4 = 34$ calcetines

Sacamos un calcetín, quedan: $34 - 1 = 33$ calcetines en el cajón.

Número de calcetines azules que quedan en el cajón: $10 - 1 = 9$

Probabilidad de sacar un calcetín azul = $\frac{9}{33}$ que simplificado es $\frac{3}{11}$.

18. (E) Si los jugadores son A, B y C y el que perdió la partida fue, por ejemplo, el A, al final de la partida A duplicó el dinero de B y de C.

Al comienzo de la partida, los jugadores B y C tenían 12 € cada uno, la mitad de 24 € por lo que el jugador A pagó 12 euros más a cada uno, por tanto, el jugador A perdió 24 euros (12 + 12). El jugador A comenzó la partida con 48 euros, 24 que pagó a B y C más 24 con los que finalizó la partida.

19. (C) Sumamos los cubos de cada planta: $1 + 5 + 13 + 25 = 44$
Se han usado 44 cubos

20. (E) Como la base es doble que su altura, el área del rectángulo se puede expresar así:
 $50 = 2a \times a = 2a^2$ De aquí se deduce que $a^2 = 25$ y por lo tanto $a = 5$ cm y $b = 10$ cm.
Perímetro = $2(a + b) = 2(5 + 10) = 30$ cm

21. (A) El grosor de una hoja es $\frac{1}{10}$ de milímetro

$$1 \text{ m} = 1\,000\,000\,000 \text{ nm}$$

$$1 \text{ mm} = 1\,000\,000 \text{ nm}$$

$$\frac{1}{10} \text{ de mm} = 1\,000\,000 : 10 = 100\,000 \text{ nm}$$

El grosor de una hoja es de 100 000 nanómetros

22. (A) Si le quedaron 3 quiere decir que Marco recibió otras 3. Después de darle a Hugo sus fracciones a Don Retorcido le quedaron 6 y eso quiere decir que a Hugo le dio otras 6.

23. (C) Para obtener la solución planteamos una tabla de doble entrada como la siguiente en la que hemos escrito los datos conocidos.

	Mujeres	Hombres	TOTAL
Llevan gafas			90
No llevan gafas			
TOTAL	130		200

Con los datos conocidos podemos completar la tabla:

- El número de hombres es: $200 - 130 = 70$

- El número de hombres que llevan gafas es: $70 : 2 = 35$

- El número de hombres que no llevan gafas es 35

- El número de mujeres y hombres que no llevan gafas es: $200 - 90 = 110$

- El número de mujeres que no llevan gafas es: $110 - 35 = 75$

	Mujeres	Hombres	TOTAL
Llevan gafas	55	35	90
No llevan gafas	75	35	110
TOTAL	130	70	200

24. (C) Calculamos la edad de Bisbís:

$$36 : 9 = 4. \text{ Bisbís tiene 4 años}$$

Calculamos la edad de Guaguá:

$$\frac{3}{2} \text{ de } 4 = 6. \text{ Guaguá tiene 6 años}$$

La suma de las edades de Guaguá y Bisbís es: $6 + 4 = 10$

25. (A) Utilizando el método de ensayo y error, se buscan los números que empiezan por 1 y se obtienen ocho números; de la misma forma encontraremos otros ocho números que empiecen por 2, y otros ocho que empiecen por 3. Total: $8 \times 3 = 24$.

$$112 - 113 - 121 - 122 - 123 - 131 - 132 - 133$$

$$211 - 212 - 213 - 221 - 223 - 231 - 232 - 233$$

$$311 - 312 - 313 - 321 - 322 - 323 - 331 - 332$$

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS*Soluciones 2ª Fase Nivel II*

1. (A) No nos queda otra que operar:

$$A) (20 - 17) \cdot (20 + 17) = 3 \cdot 37 = 111$$

$$B) 201 + 7 \cdot 20 + 17 = 201 + 140 + 17 = 358$$

$$C) 20 \cdot 17 - (201 + 7) = 340 - 208 = 132$$

$$D) 20 \cdot (1 + 7) - 20 - 17 = 20 \cdot 8 - 20 - 17 = 160 - 20 - 17 = 123$$

$$E) 20 + 17 + 20 + 17 = 74$$

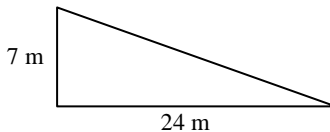
El resultado más cercano a 100 es el de la operación A.

2. (E) Sabemos que las pirámides de base cuadrada tiene 5 vértices y los prismas de base cuadrada tiene tres vértices más, es decir, 8 vértices. Si las 42 figuras fuesen prismas, contaríamos $8 \cdot 42 = 336$ vértices, o sea, nos pasaríamos en $336 - 288 = 48$ vértices. Como por cada tres vértices que nos pasamos representa una pirámide, Alba tiene $48 : 3 = 16$ pirámides.

3. (E) Si Esmeralda pensó que el melón pesaba 2 kg es porque la báscula marcó 2180 gramos, $(2000 + 180)$. Por tanto, el peso real del melón es lo que marcó la báscula más 120 gramos, es decir, $2180 + 120 = 2300$ gramos.

4. (A) En un triángulo rectángulo sabemos que su área podemos calcularla tomando un cateto como base y el otro como altura. Así pues:

$$\text{Área} = \frac{\text{CAT} \times \text{cat}}{2} \Rightarrow 84 = \frac{24 \times \text{cat}}{2} \Rightarrow \text{cat} = 7 \text{ m.}$$



Y la hipotenusa la calculamos con nuestro querido teorema de Pitágoras:

$$\text{hip}^2 = \text{CAT}^2 + \text{cat}^2 \Rightarrow \text{hip}^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 \Rightarrow \text{hip} = 25 \text{ m.}$$

5. (C) Operemos con el corazón:

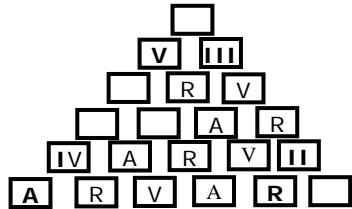
$$I. 8 \heartsuit 2 - 2 \heartsuit 8 = 8 \cdot (8 + 2) - 2 \cdot (2 + 8) = 60 \quad 6 \heartsuit 4 = 6 \cdot (6 + 4) = 60$$

(La afirmación I es cierta)

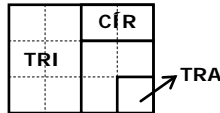
$$II. 4 \heartsuit b = 28 \Rightarrow 4 \cdot (4 + b) = 28 \Rightarrow 4 + b = 7 \Rightarrow b = 3$$

(La afirmación II también es cierta)

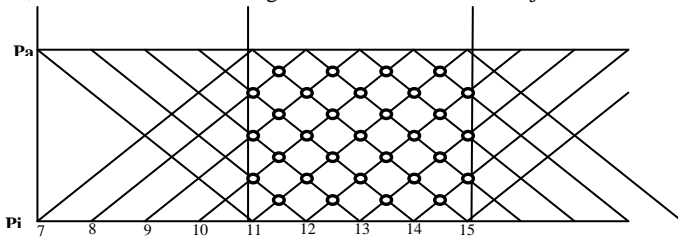
6. (D) No nos quedemos parados, solo hay que probar. El ladrillo I puede ser Rojo o Verde. Si supones que es Rojo, verás que al ir asignando los colores a los ladrillos de la pared, llegas a una situación no válida. Así que ha de ser Verde. De esta manera se llega a la solución válida: V-A-A.



7. (B) Si representamos mediante un rectángulo las figuras que tiene Don Retorcido, vemos que un cuadradito contiene 20 figuras. Así pues, hay $6 \cdot 20 = 120$ triángulos.



8. (B) En efecto, este problema es un poco trastornante. Hay más cruces de los que parece en un principio, ten en cuenta que hay cruces a las horas en punto y a las medias. Por suerte, cuando Juan Jesús navegó de Pi a Pa hizo este dibujo:



Se producen 31 cruces.

9. (E) ¿Qué número hay que sumar a -7 para obtener -1 ? $-7 + P = -1, P = 6$.
 ¿Qué número hay que restar a -5 para obtener 4 ? $-5 - Q = 4, Q = -9$.
 ¿Qué número hay que restar a 9 para obtener -4 ? $9 - R = -4, R = 13$.
 La suma de P, Q y R es $6 + (-9) + 13 = 10$

10. (A) Don Retorcido empezó con una hoja de $40 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ y, después de sus dos primeros cortes pasó a tener cuatro piezas de $20 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Por último, acabó con dieciséis hojitas de $10 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$, por lo que el perímetro total final es $16 \cdot (10 + 10 + 5 + 5) = 480 \text{ cm}$.

11. (C) Si representamos con cuadraditos BLANCOS los versos que se saben y con cuadraditos NEGROS los que aún no se saben...

Ana: □□□ ■■

Berta: □□□ ■■■ ■■■

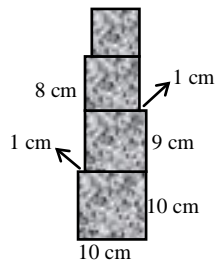
Carolina: ■■ ■■ ■■■ ■■■ ■■■ ■■■ ■■■ ■■■

Como los cuadraditos negros de Carolina representan a 48 versos, cada cuadradito son $48:16 = 3$ versos.

Las amigas tenían que aprenderse un total de $(5 + 9 + 16) \cdot 3 = 90$ versos.

12. (C) El perímetro nos lo da esta cuenta:

$$10 + 2 \cdot (10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) + 10 \cdot 1 = 130 \text{ cm.}$$



13. (B)

A	D	G	$21 = 3 \cdot 7$
B	E	H	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
C	F	I	$288 = 2^5 \cdot 3^2$

$112 = 2^4 \cdot 7$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $45 = 3^2 \cdot 5$

El 7 podemos colocarlo fácilmente sin más que ver en qué fila y columna coinciden un factor 7.

Igual ocurre con el 5.

A=7	D	G	$21 = 3 \cdot 7$
B	E	H=5	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
C	F	I	$288 = 2^5 \cdot 3^2$

$112 = 2^4 \cdot 7$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $45 = 3^2 \cdot 5$

Ahora vamos con el $8 = 2^3$. Su lugar debe ser C o F pero hay que descartar F porque si no, D o E deberían ser 9 y si miramos sus filas correspondientes vemos que no puede ser.

A=7	D	G	$21 = 3 \cdot 7$
B	E	H=5	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
C=8	F	I	$288 = 2^5 \cdot 3^2$

$112 = 2^4 \cdot 7$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $45 = 3^2 \cdot 5$

Y ya podemos saber quiénes son B y E.

A=7	D	G	$21 = 3 \cdot 7$
B=2	E=6	H=5	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
C=8	F	I	$288 = 2^5 \cdot 3^2$

$112 = 2^4 \cdot 7$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $45 = 3^2 \cdot 5$

Y ya terminamos: el 4 solo puede ser F y podemos rellenar toda la cuadrícula.

A=7	D=3	G=1	$21 = 3 \cdot 7$
B=2	E=6	H=5	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
C=8	F=4	I=9	$288 = 2^5 \cdot 3^2$

$112 = 2^4 \cdot 7$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $45 = 3^2 \cdot 5$

14. (A) Si escribimos la multiplicación en la forma habitual es muy sencillo y entretenido ir averiguando los valores de las letras. Con un primer vistazo averiguamos que la E ha de valer 7. Y ya puedes seguir tú hasta que encuentres la solución. Piensa bien en las que te llevas cada vez.
 $A+B+C+D+E = 4+2+8+5+7 = 26$

$$\begin{array}{r} 1ABCDE \\ \times \quad 3 \\ \hline ABCDE1 \\ \times \quad 3 \\ \hline 142857 \\ \times \quad 3 \\ \hline 428571 \end{array}$$

15. (C) Cada ángulo de un octógono regular mide:

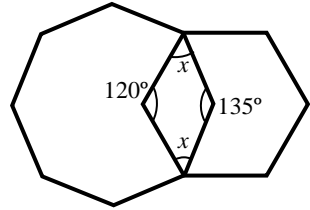
$$\frac{6 \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ .$$

Y cada ángulo de un hexágono regular mide

$$\frac{4 \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ .$$

Así pues, fijándonos en el cuadrilátero central

podemos hallar el ángulo pedido, $x + x + 120^\circ + 135^\circ = 360^\circ \rightarrow x = 52,5^\circ$.



16. (E) Como $mcm(a, b) = 2^2 \cdot 3$ y $mcm(a, c) = 3 \cdot 5$, deducimos que, a la fuerza, $a = 3$. De esta manera, b solo puede tomar dos valores, $b = 2^2 = 4$ o $b = 3 \cdot 4 = 12$ y con c ocurre algo similar, $c = 5$ o $c = 3 \cdot 5 = 15$. La única suma imposible de $b + c$ es 7.
17. (A) Podemos llamar A, B, C a cada una de las tarjetas y A_1 y A_2 a cada una de las dos caras de la tarjeta A . Así vemos que al voltearlas hay ocho posibilidades:

$$\begin{array}{cccc} A_1 B_1 C_1 & A_1 B_1 C_2 & A_1 B_2 C_1 & A_1 B_2 C_2 \\ A_2 B_1 C_1 & A_2 B_1 C_2 & A_2 B_2 C_1 & A_2 B_2 C_2 \end{array}$$

El enunciado nos dice que la suma total de todas esas caras que ahí aparecen es 120. Como cada cara aparece cuatro veces podemos deducir que la suma de las seis caras es $120:4 = 30$.

Y terminamos, la suma de las caras que no se ven es $30 - (9 + 4 + 7) = 10$.

18. (D) Si $\text{Área} = 100\pi \text{ m}^2 \rightarrow 100\pi = \pi r_1^2 \rightarrow r_1^2 = 100 \rightarrow r_1 = 10 \text{ m}$

$$\text{Si Perímetro} = 100\pi \text{ m} \rightarrow 100\pi = 2\pi r_2 \rightarrow r_2 = 50 \text{ m}$$

La diferencia entre sus radios son 40 metros.

19. (B) La condición del enunciado dice que $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot A = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot B$ y operando obtenemos que

$$\frac{3}{10} \cdot A = \frac{2}{5} \cdot B, \text{ es decir, } 15A = 20B, \text{ por tanto, si dividimos todo entre 5 obtenemos}$$

la respuesta: $3A = 4B$.

20. (C) En el recinto **A** debemos colocar los números desde el 1 hasta el 20 que sean mayores que 11 y no sean múltiplos ni de 4 ni de 6.
¿Qué números son esos? Pues el 13, el 14, el 15, el 17 y el 19. Cinco números.

21. (D) Escribimos los tres números como potencias de exponente 17 y comparamos:
 $P = 11^{51} = 11^{3 \cdot 17} = (11^3)^{17} = 1331^{17}$ $Q = 1317^{17}$ $R = 37^{34} = 37^{2 \cdot 17} = (37^2)^{17} = 1369^{17}$
 Respondemos: $Q < P < R$.

22. (E) Este es un problema para recordar algunos cuadrados perfectos. Si escribimos entre paréntesis las teclas pulsadas y entre corchetes los números reales con los que se ha hecho la operación, tenemos:

$$(12) \cdot (12) = 1156 = [34] \cdot [34] \Rightarrow (1) \rightarrow [3] \quad (2) \rightarrow [4]$$

$$(3) \cdot (3) = 81 = [9] \cdot [9] \Rightarrow (3) \rightarrow [9]$$

$$(45) \cdot (45) = 144 = [12] \cdot [12] \Rightarrow (4) \rightarrow [1] \quad (5) \rightarrow [2]$$

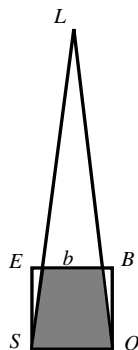
$$(67) \cdot (67) = 5625 = [75] \cdot [75] \Rightarrow (6) \rightarrow [7] \quad (7) \rightarrow [5]$$

Las únicas teclas que quedan por pulsar son el (8) y el (9) y los únicos números por asignar son el [6] y el [8]. Por tanto, si pulso (8) es en realidad un [6] y si pulso (9) es en realidad un [8].

23. (A) Sabemos que el lado del cuadrado *BESO* mide 4 cm y, por tanto, la altura del triángulo *SOL* (como tiene área 32 cm^2) ha de medir 16 cm. Para calcular el área del trapecio nos falta saber la longitud *b* de su base menor. Fíjate que el triángulo superior blanco es semejante a *SOL*, así pues el cociente entre sus alturas es igual al cociente entre sus bases:

$$\frac{16 - 4}{16} = \frac{b}{4} \rightarrow b = \frac{4 \cdot 12}{16} = 3 \text{ cm.}$$

$$\text{Área del trapecio: } \frac{4 + 3}{2} \cdot 4 = 14 \text{ cm}^2.$$



24. (C) Como la frase «dentro de dieciséis años mi edad será el doble que la que tenía hace dos años» se dirá dentro de cinco años, si la pronunciáramos hoy sería «dentro de veintiún años mi edad será el doble que la que tendré dentro de tres años». Si *x* representa la edad que tengo hoy, la ecuación que se corresponde con dicha situación es $x + 21 = 2(x + 3)$.

25. (B) La suma de los primos menores que 40 es:

$$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 = 197$$

Por tanto Gustavita se equivocó en el número $230 - 197 = 33$.

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (B)

2	4	x	2
y	3	3	z
6	u	1	t

Las sumas horizontales son $8 + x$, $6 + y + z$, $7 + u + t$, y valen las tres lo mismo.

Las sumas verticales son $8 + y$, $7 + u$, $4 + x$, $2 + z + t$, y también tienen las cuatro el mismo valor.

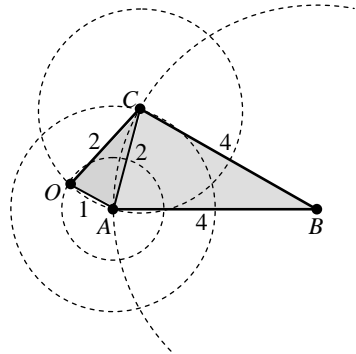
De las primeras, $8 + x = 7 + u + t$.

De las segundas $4 + x = 7 + u$.

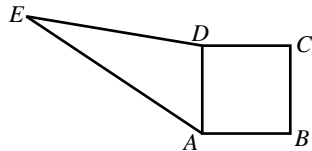
Restando estas dos ecuaciones, miembro a miembro tenemos $4 = t$.

2. (A) Según los datos, el número total de libros ha de ser múltiplo de 4 y de 9. Como estos son primos entre sí, el número tiene que ser múltiplo de 36. El único múltiplo de 36 comprendido entre 50 y 100 es 72. Así, hay 18 ($72/4$) libros de novela y 8 ($72/9$) libros de poesía. No son ni novelas ni libros de poesía $72 - 18 - 8 = 46$.

3. (D) Como la suma de los dos lados menores de un triángulo ha de ser mayor que el lado mayor, los dos lados indicados y la diagonal han de ser concurrentes. Los lados del cuadrilátero, entonces miden 4, 1, 4 y 2. Y su perímetro es 11. (Ver figura adjunta)

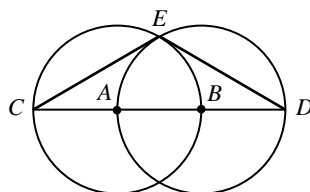


4. (C) El área del triángulo mide 16 cm^2 y su base mide 4 cm. Su altura, distancia desde E hasta el lado AD , mide 8 cm. Y la distancia desde E hasta la recta BC mide 12 cm.



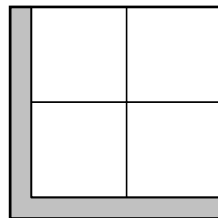
5. (C) En el Concurso de Primavera, como es bien sabido, en cada pregunta sólo hay una respuesta correcta. Con los datos aportados, la única respuesta que puede ser correcta es C. Pues si A fuera correcta, también lo sería B y habría dos respuestas correctas, lo que no puede ser. Si B fuera correcta, también lo sería C (por el contrarrecíproco de no C \Rightarrow no B), lo que tampoco puede ser. La misma causa excluye D o E como respuestas correctas. Sólo queda C.

6. (C) El triángulo ABE es equilátero, de modo que el ángulo \widehat{AEB} mide 60° . Como los triángulos CEA y DEB son isósceles y sus ángulos centrales miden 120° cada uno, los ángulos \widehat{CEA} y \widehat{DEB} miden 30° cada uno, y el ángulo \widehat{CED} mide $30^\circ + 60^\circ + 30^\circ = 120^\circ$.



7. (A) Como QRS es múltiplo de 5, S necesariamente es 5. Al ser PQR múltiplo de 4, QR debe ser múltiplo de 4. Las únicas posibilidades son 12, 24, 32 y 52. La última se descarta porque $S = 5$ y no puede ser $Q = 5$. Ahora, RST es múltiplo de 3. Como S es 5 y R sólo puede ser 2 o 4, con $R = 2$ tenemos $25T$, que sólo es múltiplo de 3 con $T = 2$ o $T = 5$, imposible, en cualquier caso. Con $R = 4$ tenemos $45T$, que sólo puede ser múltiplo de 3 con $T = 3$. De modo que $QR = 24$ y $PQRST = 12453$. Y esto implica que $P = 1$.

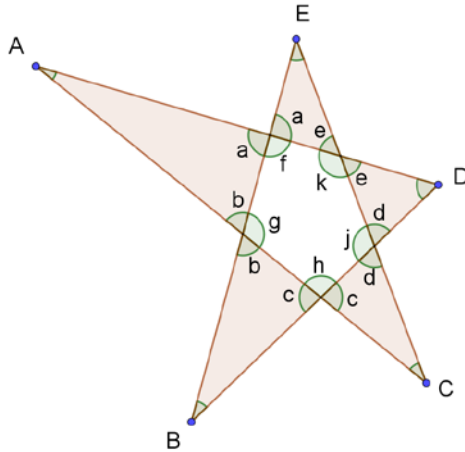
8. (E) Si el área del cuadrado es 125 cm^2 , el lado mide $5\sqrt{5} \text{ cm}$, y el área del polígono en forma de L de la figura, 25 cm^2 . Llamando x al lado menor del polígono, tenemos que $5\sqrt{5} \cdot x + (5\sqrt{5} - x)x = 25$. Esta ecuación se puede escribir como $x^2 - 10\sqrt{5}x + 25 = 0$, cuyas soluciones son $x = 5\sqrt{5} - 10$ y $x = 5\sqrt{5} + 10$. La segunda solución sería mayor que el lado del cuadrado inicial, por lo que se desecha. La solución correcta es $5\sqrt{5} - 10 = 5 \cdot (\sqrt{5} - 2)$.



9. (A)
$$\left. \begin{array}{l} E_1 \quad a \cdot b = 2 \\ E_2 \quad b \cdot c = 3 \\ E_3 \quad c \cdot d = 4 \\ E_4 \quad d \cdot e = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow E_2 \cdot E_4 \div (E_1 \cdot E_3) \quad \frac{e}{a} = \frac{15}{8}$$

10. (B) Un polígono estrellado se denota por N/M , siendo N el número de vértices y M el paso (n° de orden del siguiente vértice con el que se une uno dado). El polígono estrellado de la figura es $5/2$. Sólo son posibles los polígonos estrellados en los que N/M es una fracción irreducible, es decir, aquellos en los que N y M son primos entre sí. En ellos, la suma de los ángulos interiores es $180^\circ \cdot (N - 2M)$. En nuestro caso $180^\circ \cdot (5 - 2 \cdot 2) = 180^\circ$.

Pero...es claro que esta información no la tienen todos los niños que participan en el concurso, de modo que aportaremos otro método de resolución. Observando la figura, tenemos:



$$\left. \begin{aligned} A + a + b &= 180^\circ \\ B + b + c &= 180^\circ \\ C + c + d &= 180^\circ \\ D + d + e &= 180^\circ \\ E + e + a &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow A + B + C + D + E + 2(a + b + c + d + e) = 900^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} a &= 180^\circ - f \\ b &= 180^\circ - g \\ c &= 180^\circ - h \\ d &= 180^\circ - j \\ e &= 180^\circ - k \end{aligned} \right\}$$

Ahora, al ser a y f adyacentes, lo mismo que b y g , c y h , d y j , e y k

tenemos que $A + B + C + D + E + 2[900^\circ - (f + g + h + j + k)] = 900^\circ$
 La suma de los ángulos interiores de un pentágono convexo es 540° , por tanto
 $A + B + C + D + E = 900^\circ - 2 \cdot (900^\circ - 540^\circ) = 900^\circ - 720^\circ = 180^\circ$.

11. (D) En la tabla se recogen los resultados igualmente posibles y los favorables:

Los casos favorables están denotados por 1 y los no favorables por 0. La probabilidad de que el número que muestra el dado rojo sea mayor que el que muestra el dado azul es:

$$p = \frac{1+2+3+4+5}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

A \ R	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

12. (C) Puesto que la media fue 76, ninguno obtuvo menos de 60 puntos y 5 obtuvieron 100 puntos, llamando x al número total de estudiantes e y a la puntuación mínima, podemos plantear el siguiente sistema:

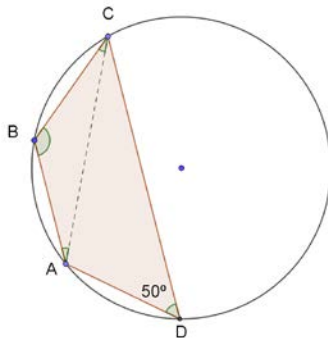
$$\left. \begin{array}{l} 76x = 500 + y(x-5) \\ y \geq 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{76x - 500}{x - 5} \geq 60 \Rightarrow 76x - 500 \geq 60x - 300 \Rightarrow 16x \geq 200$$

Y el número mínimo de estudiantes que verifica la inecuación es $x = 13$.

13. (B) Sabemos que los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios, por lo que el ángulo

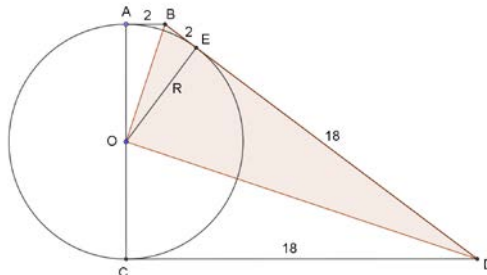
$\hat{A}BC = 130^\circ$. Esto indica que los dos ángulos iguales del triángulo ABC miden 25° cada uno. Como AB es paralelo a CD , el cuadrilátero es un trapecio, y al estar inscrito en la circunferencia, es isósceles.

Por tanto, el ángulo $\hat{B}CD = 50^\circ$, $\hat{A}CD = 25^\circ$ y $\hat{D}AC = 105^\circ$.



14. (A) En la figura se observa que el radio de la esfera es la altura de un triángulo rectángulo en el que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 2 y 18 cm. respectivamente. Aplicando el Teorema de la Altura, tenemos que:

$$R = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = 6$$



15. (C) Las probabilidades de los cuatro sucesos son:

$$p(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0'125$$

$$p(B) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = 0'5$$

$$p(C) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0'375$$

$$p(D) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0'3125$$

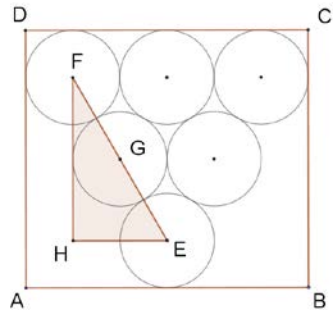
El orden de probabilidades crecientes de los cuatro sucesos es $ADCB$

16. (C) Como $AB = 6$ cm. y dicha longitud es 6 veces el radio de cada circunferencia, los radios miden todos 1 cm. En el triángulo EHF , el lado HE mide 2 cm y el lado EF mide 4 cm.

$$\text{Así } FH = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

La distancia que se pide es:

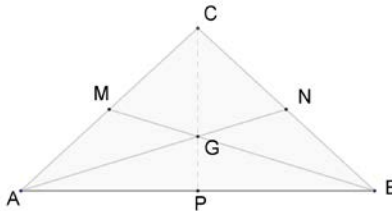
$$FH - 2R = 2\sqrt{3} - 2 = 2 \cdot (\sqrt{3} - 1).$$



17. (E) Si llamamos x a la altura de la mesa, R a la de Raquel y P a la de Pablo, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} x + R = P + 80 \\ x + P = R + 100 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + P + R = P + R + 180 \Rightarrow 2x = 180 \Rightarrow x = 90.$$

18. (D) Al trazar la tercera mediana, CP , el triángulo ABC queda dividido en 6 triángulos de igual área. Por tanto, el cuadrilátero $MGNC$ tiene área igual a 6 cm^2 .



19. (B) Si la edad de Pablo es x , entonces $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (100 - x)$; $3x = 200 - 2x$; $x = 40$

20. (A) La longitud del arco del sector es la longitud de la circunferencia de la base del cono. Así, podemos obtener el radio de la base: $\frac{3 \times 40^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = 2\pi R$; $R = \frac{1}{3}$.

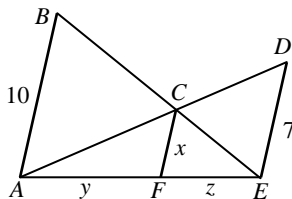
Aplicando el Teorema de Pitágoras, obtenemos la altura del cono:

$$h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{80}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{5}$$

$$\text{Y el volumen del cono es: } V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \frac{1}{9} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{3} = \frac{4\pi\sqrt{5}}{81}$$

21. (A) Si llamamos x a la longitud del segmento FC , y a la del segmento AF y z a la del segmento FE , por semejanza de triángulos tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{y+z}{10} = \frac{z}{x} \\ \frac{y+z}{7} = \frac{y}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{17}{70} \cdot (y+z) = \frac{y+z}{x} \Rightarrow x = \frac{70}{17}$$



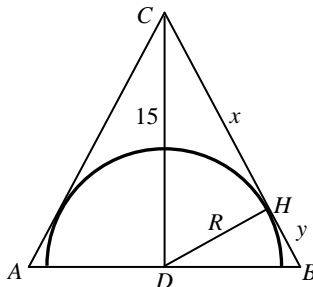
22. (B) Los casos favorables son: RRR, RRVR, RVRR y VRRR. Las probabilidades de cada uno de los casos son, por el mismo orden, $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ y $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$. Pero las cuatro tienen el mismo valor, $\frac{1}{10}$. Así, la probabilidad pedida es $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

23. (B) Aplicando el Teorema de la Altura, tenemos que $R^2 = x \cdot y$. Como el lado del triángulo isósceles mide 17, pues es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 15 y 8, los segmentos x y y se pueden calcular aplicando el Teorema de los Catetos:

$$x = \frac{15^2}{17}; \quad y = \frac{8^2}{17}$$

De modo que

$$R^2 = x \cdot y = \frac{15^2 \cdot 8^2}{17^2} \Rightarrow R = \frac{120}{17}$$



24. (A) El grado del cociente es 98, y el grado del resto es 1, de modo que podemos escribir:

$$x^{100} - 2x^{99} + 4 = (x^2 - 3x + 2) \cdot C(x) + mx + n.$$

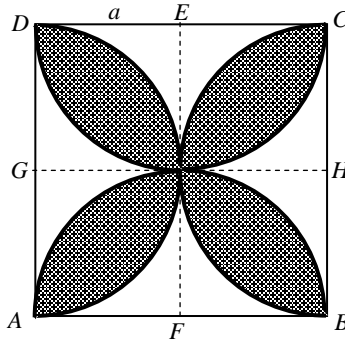
Ahora, sustituyendo x por 1 y 2 sucesivamente tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow 3 = m + n \\ x = 2 \Rightarrow 4 = 2m + n \end{array} \right\} \Rightarrow m = 1; \quad n = 2. \Rightarrow R(x) = x + 2.$$

25. (A) El área de cada pétalo se puede calcular restando al área del cuadrado de lado a , el doble de la diferencia entre el área del cuadrado y el área del cuarto de círculo. Es

$$\text{decir, el área del pétalo vale: } a^2 - 2 \cdot \left(a^2 - \frac{\pi \cdot a^2}{4} \right) = a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

Como el área sombreada es 4 veces el área de un pétalo, es $A = (2\pi - 4) \cdot a^2$



XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (D) Al ser una función lineal trabajamos con la pendiente que es constante.

$$m = \frac{f(2017) - f(2005)}{2017 - 2005} = \frac{f(2035) - f(2017)}{2035 - 2017}, \text{ de donde}$$

$$\frac{100}{12} = \frac{f(2035) - f(2017)}{18}, \text{ por tanto } f(2035) - f(2017) = 150.$$

2. (D) La primera cifra de todos los números con nueve cifras puede ser del 1 al 9. Por tanto, el número mínimo de cartas que hay que sacar para que se repita la primera cifra son diez, ya que lo peor que puede pasar es que saque nueve cartas con la primera cifra diferente y la décima carta ya tiene que ser un número con la primera cifra repetida.

3. (B) Llamamos k al número pedido, $k = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} k^3 &= 2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})^2 \cdot (2 - \sqrt{5})} + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5}) \cdot (2 - \sqrt{5})^2} + 2 - \sqrt{5} \\ &= 4 + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5}) \cdot (4 - 5)} + 3\sqrt[3]{(4 - 5) \cdot (2 - \sqrt{5})} = 4 - 3\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - 3\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \\ &= 4 - 3\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\right) = 4 - 3k. \text{ Solo nos queda resolver } k^3 = 4 - 3k. \end{aligned}$$

Aplicando Ruffini podemos factorizar la ecuación en $(k - 1)(k^2 + k + 4) = 0$. La única solución real es $k = 1$, por tanto, $k = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$.

4. (A) Observando la gráfica vemos que para que $f(f(f(x)))$ sea 0, $f(f(x))$ tiene que ser -4 ó 0. Vamos a estudiar cada caso:

- Para que $f(f(x))$ sea -4 , entonces $f(x)$ tiene un único valor (en la gráfica no se puede determinar el valor exacto, será un valor negativo menor que -4 , llamémoslo a).

i) Para que $f(x)$ sea a , entonces x tiene un único valor $b < a < -4$.

- Para que $f(f(x))$ sea 0, entonces $f(x)$ tiene que ser -4 ó 0.

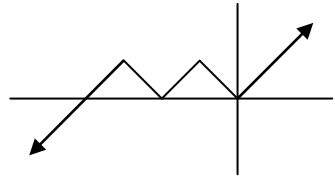
ii) Para que $f(x)$ sea 0, entonces x tiene que ser -4 ó 0.

iii) Para que $f(x)$ sea -4 , entonces x tiene un único valor que es a .

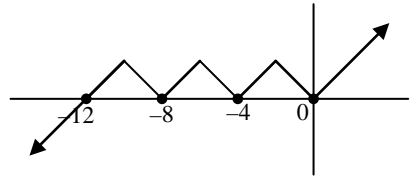
En total, cuatro soluciones, de menor a mayor $b, a, -4$ y 0.

Resulta interesante hallar y representar las funciones $f(f(x))$ y $f(f(f(x)))$

$$f(f(x)) = \begin{cases} x+8 & \text{si } x < -6 \\ -x-4 & \text{si } -6 \leq x < -4 \\ x+4 & \text{si } -4 \leq x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$



$$f(f(f(x))) = \begin{cases} x+12 & \text{si } x < -10 \\ -x-8 & \text{si } -10 \leq x < -8 \\ x+8 & \text{si } -8 \leq x < -6 \\ -x-4 & \text{si } -6 \leq x < -4 \\ x+4 & \text{si } -4 \leq x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$



En la gráfica se ven claramente las cuatro soluciones: $-12, -8, -4$ y 0 .

5. (D) Que f sea una función periódica de periodo $T = 5$ y en el intervalo $[3, 8)$ significa que $f(3) = f(8) = f(13) = \dots = f(2013)$, por tanto $f(2017) = f(7) = 4$.

6. (D) El cociente entre el área del círculo grande y el área de la región que está fuera del pequeño pero dentro del grande es

$$\frac{x}{y} = \frac{\pi R^2}{\pi R^2 - \pi r^2} = \frac{R^2}{R^2 - r^2}.$$

$$\text{Operamos } xR^2 - xr^2 = R^2y \Rightarrow (x-y)R^2 = xr^2 \Rightarrow \frac{R^2}{r^2} = \frac{x}{x-y}.$$

$$\text{Solo queda } \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-y}}.$$

7. (A) Los números que verifican que su producto es igual a cinco veces su suma cumplen

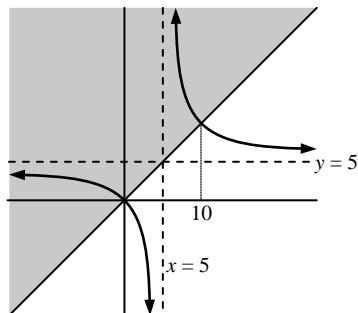
$$xy = 5(x+y) \Rightarrow y = \frac{5x}{x-5}.$$

Representamos la función y la condición $x \leq y$. La

recta $x = 5$ es la asíntota vertical de la función. Los puntos de corte entre la curva y la recta $\begin{cases} y = \frac{5x}{x-5} \\ x = y \end{cases}$ son $O(0, 0)$ y $P(10, 10)$. En la gráfica se ve claramente que las

posibles soluciones estarán en $(-\infty, 0] \cup (5, 10]$.

- En $x \in (-\infty, 0]$, los valores posibles de y son 0, 1, 2, 3 y 4. De los cuales solo cumplen la condición de ser enteros los puntos $(-20, 4)$ y $(0, 0)$.
 - En $x \in (5, 10]$, los valores posibles de x son 6, 7, 8, 9 y 10. De los cuales solo cumplen la condición de ser enteros los puntos $(6, 30)$ y $(10, 10)$.
- En total, cuatro soluciones.



8. (A) $f(\operatorname{tg}^2 \theta) = f\left(\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) = f\left(\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}\right) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta} = \operatorname{sen} \theta$

9. (B) Llamamos a , b y c a los lados del ortoedro. Los lados del triángulo XYZ son las diagonales de las caras. Por tanto obtenemos las siguientes condiciones

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 64 \\ b^2 + c^2 = 81 \\ a^2 + c^2 = 55 \end{array} \right\} \text{ sumando las tres ecuaciones obtenemos } 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 200.$$

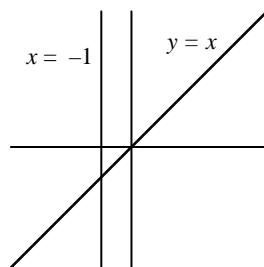
Es decir, $a^2 + b^2 + c^2 = 100$, por tanto la diagonal del ortoedro será

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{100} = 10.$$

10. (E) Trabajamos la ecuación dada. $x^2 - xy + x - y = 0$
 $\Rightarrow x(x - y) + (x - y) = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - y) = 0.$

Esta ecuación tiene dos soluciones $\begin{cases} x = -1 \\ x = y \end{cases}$. Si lo

representamos gráficamente vemos que son dos rectas que se cortan.



11. (C) En total hay 64 calcetines, el primero que cogemos puede ser de cualquier color y

quedarán 7 calcetines del mismo color de un total de 63. Por tanto, $P = \frac{7}{63} = \frac{1}{9}$.

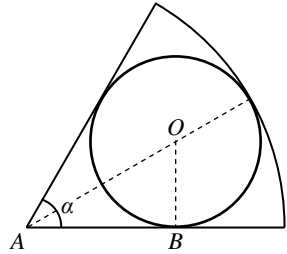
12. (A) En el triángulo rectángulo ABO , $OB = r$, $AO = 2r$

y por tanto $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$ De aquí se deduce

que $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

Luego, si la amplitud del sector es 60° ,

$$\frac{A_{\text{sector}}}{A_{\text{circulo}}} = \frac{\frac{\pi R^2}{6}}{\pi r^2} = \frac{R^2}{6r^2} = \frac{(3r)^2}{6r^2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$



13. (E) La división pedida también se puede escribir como $P(x):(x-1)(x-2)$. Cuando simplificamos el dividendo y el divisor entre $(x-2)$, el resto de la división $P(x):(x-1)$ también queda simplificado por $(x-2)$. Pasa lo mismo cuando simplificamos entre $(x-1)$.

Aplicando el teorema del resto, resulta fácil encontrar el resto de la división $P(x):(x-1)$ (será $P(1)$) y el resto de $P(x):(x-2)$ (será $P(2)$). Luego tendremos que trabajar con dichos restos.

El resto de la división pedida será $P(2)(x-1) - P(1)(x-2) = 7(x-1) - (x-2)$ que tiene por solución $6x - 5$.

14. (B) Si las soluciones de la ecuación son x_1 y x_2 sabemos que $x_1 + x_2 = b$ y $x_1 \cdot x_2 = c$,

es decir $c = \operatorname{sen}\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{\pi}{7}$.

$$b = \operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7} \Rightarrow b^2 = \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} + 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{7} \cos\frac{\pi}{7} = 1 + 2c.$$

15. (C) El cociente de dividir 2017 entre 9 es 224 y el resto 1. Eso significa que si sumamos $220 + 221 + \dots + 224 + \dots + 227 + 228 = 2016$. Como solo le falta uno para la suma pedida, ponemos 229 y quitamos el 228.

16. (D) Llamando V_s al volumen del sólido y V_l al volumen del líquido tenemos que

$$V_l = \left(1 + \frac{1}{12}\right)V_s, \text{ cuando se solidifica } V_s = \frac{1}{1 + \frac{1}{12}}V_l = \frac{12}{13}V_l.$$

Por tanto, disminuye $\frac{1}{13}$.

17. (E) Llamamos $x = \widehat{ACM}$, $y = \widehat{BCN}$. Como $AN = AC$, entonces el triángulo ACN es isósceles y por tanto el ángulo $\widehat{ANC} = x + 43^\circ$. Del mismo modo, como $BM = BC$, el triángulo MBC es isósceles y por tanto el ángulo $\widehat{BMC} = y + 43^\circ$. Fijándonos en los ángulos del triángulo MNC , tenemos $43^\circ + x + 43^\circ + y + 43^\circ = 180^\circ$, de donde $x + y = 51^\circ$. Por tanto, $\widehat{ACB} = x + 43^\circ + y = 43^\circ + 51^\circ = 94^\circ$.

18. (A) A y B pertenecen a la parábola, por tanto, $A(a, a^2 - 7a - 1)$, $B(b, b^2 - 7b - 1)$. Como el origen de coordenadas es el punto medio, cumple que

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 0 \\ \frac{a^2 - 7a - 1 + b^2 - 7b - 1}{2} = 0 \end{cases}$$

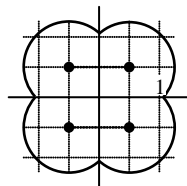
Las soluciones del sistema son $a=1, b=-1$ ó $a=-1, b=1$. En ambos casos los puntos serán $(1, -7)$ y $(-1, 7)$. La distancia entre ellos es:

$$d = \sqrt{(1+1)^2 + (-7-7)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

19. (E) Para valores de $x > 0, y > 0$, nos queda la ecuación $x^2 + y^2 = x + y$ que es la ecuación de una circunferencia $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y

radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$. De todos los puntos de la circunferencia solo valen los que cumplen $x > 0, y > 0$, pero éstos ya son infinitos.

Como curiosidad, mostramos la representación gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = |x| + |y|$.



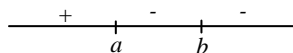
20. (A) Buscamos algunas de las características de la función $f(x) = (a-x)(b-x)^2$ y así vamos descartando.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Por tanto, solo pueden ser A), C) o E).

Cortes con el eje X. $(a-x)(b-x)^2 = 0$, tiene por soluciones $x=a$ y $x=b$. Tendrá dos puntos de corte. Por tanto, solo pueden ser A) o C)

Estudiamos el signo de la función

Por tanto, es la A).



21. (D) Para conseguir el cuadrado de área más pequeña, la distancia del punto a la recta (distancia más corta) tendrá que ser la diagonal del cuadrado (distancia más larga).

$$d_{Pr} = \frac{|3-2+4|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}. \text{ Un cuadrado de lado } l \text{ tiene una diagonal que mide } l\sqrt{2}.$$

$$\text{Por tanto, } \frac{\sqrt{10}}{2} = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ En cuyo caso, el área será } \frac{5}{4}.$$

22. (C). Trabajamos con la afirmación dada $\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

$$(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \frac{1+3+2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow 1 + \operatorname{sen} 2\alpha = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ por tanto, } 2\alpha = 60^\circ \text{ ó } 120^\circ. \text{ De este modo } \alpha \text{ tendrá por soluciones } 30^\circ \text{ ó } 60^\circ. \text{ Es decir, dos soluciones.}$$

23. (E) El $\log_b c = \log_{a^{30}} a^{42} = x$. Aplicando la definición $(a^{30})^x = a^{42} \Rightarrow 30x = 42$. Por tanto, $x = \frac{7}{5}$.

24. (A) Sea $P(x, y)$ y $Q(0, 0)$, la “distancia taxi” queda definida como $d_{\text{taxi}}(P, Q) = |x-0| + |y-0| = 2$. Solo hay que analizar la figura que forman.

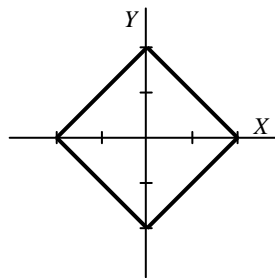
$$\text{Si } x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y = 2$$

$$\text{Si } x > 0, y < 0 \Rightarrow x - y = 2$$

$$\text{Si } x < 0, y > 0 \Rightarrow -x + y = 2$$

$$\text{Si } x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y = 2$$

Forman un cuadrado.



25. (C) Para analizar qué número está próximo a $\sqrt{101} - 10$, multiplicamos y dividimos por el conjugado.
$$\frac{(\sqrt{101} - 10)(\sqrt{101} + 10)}{\sqrt{101} + 10} = \frac{101 - 100}{\sqrt{101} + 10} = \frac{1}{\sqrt{101} + 10} \approx \frac{1}{20}.$$

Participantes y relación de ganadores del XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Una vez más en la primera fase celebrada en los propios centros se superó la cifra de 40 000 estudiantes de más de 500 centros participantes.

Aunque se inscribieron 3485 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 3406. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

	NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
	5º P y 6º P		1º ESO, 2º ESO		3º ESO, 4º ESO		1º B, 2º B	
nº de participantes	234	631	444	628	440	516	337	176
Totales por nivel	865		1072		956		513	

Los tres, y en algún caso cuatro, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

NIVEL I

1. Raúl Martínez Castillo (6º Primaria) Edith Stein, CPR
2. Diego López Aragón (5º Primaria) CP La Navata
3. Daniel Ribalta Andrés (6º Primaria) CP de Prácticas Asunción Rincón

NIVEL II

1. Daniel Mecha Martín (2º ESO) CPR Gredos San Diego Guadarrama
2. HyongGuk Hwang. (1º ESO) IES Gerardo Diego
3. Álvaro Torrico Espiga (2º ESO) CPR San Agustín

NIVEL III

1. Shenghao Zhang (4º ESO) CPR Arcángel Rafael
2. Nicolás Rey Rodríguez (3º ESO) CPR Fray Luis de León
3. Javier Durán Fernández (4º ESO) Colegio Alemán de Madrid

NIVEL IV

1. Alejandro Epelde Blanco (1º Bchto) Montessori School Los Fresnos
1. Saúl Rodríguez Martín (2º Bchto) CPR Villa de Griñón
3. Jia Jie Tao (2º Bchto) IES San Mateo
3. Marcos Vázquez Verdejo (2º Bchto) CPR Divina Pastora

RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MEJOR PUNTUACIÓN POR NIVEL(Elaborada con las **tres mejores puntuaciones** de cada centro en cada nivel)**XXI CONCURSO DE PRIMAVERA Mayo 2017**

NIVEL I		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
CP TIRSO DE MOLINA	Madrid	281
CP DE PRÁCTICAS ASUNCIÓN RINCÓN	Madrid	218
COLEGIO ALEMÁN DE MADRID	Madrid	212
CPR SAN AGUSTÍN	Madrid	265
CP ESCUELAS BOSQUE	Madrid	258
CP FEDERICO GARCÍA LORCA	Majadahonda	252
CP JOSÉ CALVO SOTELO	Madrid	251
CPR EDITH STEIN	Madrid	247
CPR AGUSTINIANO	Madrid	247
CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	243

NIVEL II		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
CPR SAN AGUSTÍN	Madrid	283
IES SAN JUAN BAUTISTA	Madrid	269
COLEGIO ALEMÁN DE MADRID	Madrid	266
CPR JOYFE	Madrid	247
IES RAMIRO DE MAEZTU	Madrid	244
CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	240
IES JOSÉ LUIS SAMPEDRO	Tres Cantos	238
IES MARÍA GUERRERO	Collado Villalba	236
CPR NORFOLK	Cobeña	230
IES GRAN CAPITÁN	Madrid	225
CPR NUESTRA SRA DEL BUEN CONSEJO	Madrid	225

NIVEL III		
NOMBRE DEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
COLEGIO ALEMÁN DE MADRID	Madrid	283
CPR AMOR DE DIOS	Madrid	246
CPR JOYFE	Madrid	239
KING'S COLLEGE	Tres Cantos	230
CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	228
CPR ARCANGEL RAFAEL	Madrid	226
IES ÁNGEL CORELLA	Colmenar Viejo	209
RUNNYMEDE COLLEGE	Alcobendas	202
IES JOSÉ LUIS SAMPEDRO	Tres Cantos	200
CPR SAN AGUSTÍN	Madrid	196

NIVEL IV		
NOMBRE DEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
IES SAN MATEO	Madrid	266
IES RAMIRO DE MAEZTU	Madrid	271
IES FORTUNY	Madrid	217
CPR VILLA DE GRIÑÓN	Griñón	195
CPR MIRABAL	Boadillo del Monte	191
CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	178
IES CERVANTES	Madrid	177
IES CARDENAL CISNEROS	Madrid	177
CPR VIRGEN DE ATOCHA	Madrid	174
IES ARQUITECTO VENTURA RODRÍGUEZ	Boadillo del Monte	172

XXXV CONCURSO “PUIG ADAM” DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.

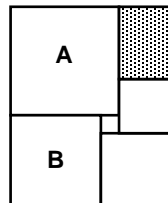
Madrid, 3 de junio de 2017

NIVEL I (3º de E.S.O.)

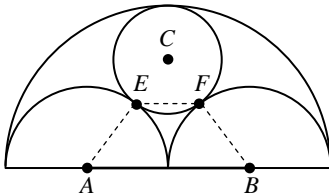
Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)

El rectángulo de la figura está dividido en seis regiones. Cinco de ellas, que no están sombreadas, son cuadrados. Si el área del cuadrado A es 144 y el área del cuadrado B es 100, ¿cuál es el área del rectángulo sombreado?

**Problema 2.** (7 puntos)

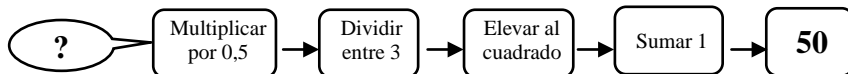
En un semicírculo de radio 2 dibujamos dos semicircunferencias de radio 1 con centros A y B y una circunferencia con centro C y tangente a las tres semicircunferencias. Los puntos E y F son los de tangencia de la circunferencia con las dos semicircunferencias pequeñas. Calcula el área del trapecio $ABFE$.



Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)

Para llegar a 50 en la siguiente cadena de operaciones, ¿por qué número positivo tendrías que haber comenzado?

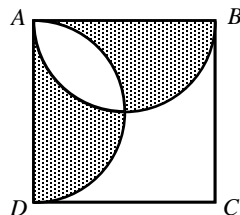
**Problema 2A.** (1,5 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior y n la suma de las cifras de T . La media de las edades del abuelo, la abuela y sus n nietos es 28 años. La media de las edades de los nietos es 10 años. Si el abuelo tiene 4 años más que la abuela, ¿qué edad tiene el abuelo?

Problema 3A. (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior y k el cociente de sus cifras ($k > 1$). En la figura se muestra un cuadrado de lado k y dos semicircunferencias de diámetros AB y AD .

¿Cuál es el área de la región sombreada?



Problema 1B. (1 punto)

Sean m, n, p y q números enteros diferentes tales que $2^m + 2^n - 2^p + 2^q = 131$.

Calcula $m + n + p + q$.

Problema 2B. (1,5 puntos)

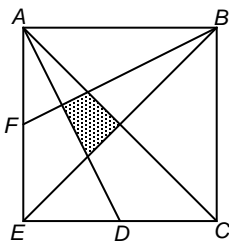
Sea T la respuesta del problema anterior. Andrés y Beatriz deciden ir en moto desde un pueblo hasta otro que se encuentra a $4T$ km de distancia. Andrés va a una velocidad constante de 50 km/h. En cambio Beatriz conduce la mitad del trayecto a 40 km/h y la otra mitad a 60 km/h. Calcula la diferencia, en segundos, entre los tiempos que emplean cada uno.

Problema 3B. (2 puntos)

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $P + S = C$ donde P es un número primo, S un cuadrado perfecto y C un cubo perfecto, todos menores que T . Por ejemplo: $7 + 1 = 8$ es una solución.

Problema 4. (5 puntos)

Sea a la respuesta del problema 3A, b la respuesta del problema 3B. En el cuadrado de la figura la longitud de sus lados es $\frac{b}{a}$, D y F son los puntos medios de los lados CE y EA , respectivamente. Calcula el área del cuadrilátero sombreado.



NIVEL II (4° de E.S.O.)

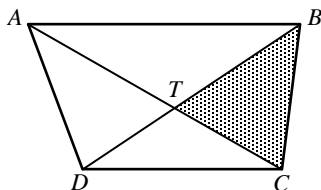
Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)

Cinco enteros positivos consecutivos, $p < q < r < s < t$, todos menores que 2000, tienen por suma un cuadrado perfecto, mientras que la suma de los tres centrales, q, r y s es un cubo perfecto. Calcula la raíz cuadrada de la suma de los cinco.

Problema 2. (7 puntos)

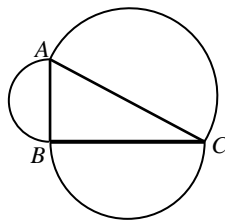
En el trapecio $ABCD$ de la figura se verifica que el área del triángulo ABC es 150 y el área del triángulo ACD es 120. Calcula el área del triángulo BCT .



Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)

Los lados del triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en B , son diámetros de tres semicircunferencias, como muestra la figura. Si el área del semicírculo de diámetro AB es 8π y la longitud del arco de diámetro AC es $\frac{17}{2}\pi$, calcula la longitud del diámetro BC .

**Problema 2A.** (1,5 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior. La media de una lista de $T - 4$ enteros positivos es 10, la mediana es 9 y la única moda que es 8. ¿Cuál es el mayor entero que puede aparecer en dicha lista?

Problema 3A. (2 puntos)

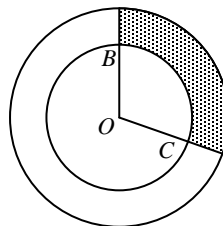
Sea T la respuesta del problema anterior y $k = \frac{T}{5}$. ¿Cuántos enteros n , de tres cifras pero no mayores que 200, verifican que $(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ es divisible entre k ?

Problema 1B. (1 punto)

Obtén la única solución real de la ecuación $\sqrt{7-2x} = 2x-1$.

Problema 2B. (1,5 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior. Si el cociente entre los radios de las circunferencias concéntricas de la figura es T , calcula el cociente entre el área de la parte de corona circular sombreada y el área del sector circular OBC .

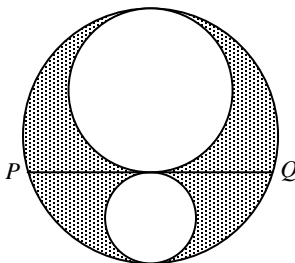


Problema 3B. (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = 4T$. Calcula la diferencia entre el perímetro y el doble de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que el radio del círculo inscrito es k .

Problema 4. (5 puntos)

Sea a la respuesta del problema 3A, b la respuesta del problema 3B y sea k la suma de todas las cifras de a y b . En la figura adjunta se observan dos circunferencias más pequeñas, tangentes entre sí y también tangentes a la circunferencia mayor. Si el área de la zona sombreada es igual a $k\pi$, ¿cuál es la longitud de PQ ?



NIVEL III (1° de Bachillerato)

Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)

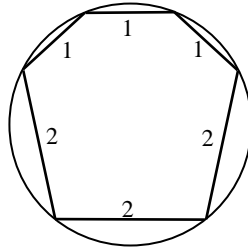
En el conjunto de los números reales positivos definimos la función f mediante la expresión:

$$f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)} .$$

¿Cuál es el valor mínimo que toma f ? ¿Para qué valor de x se alcanza ese valor mínimo?

Problema 2. (7 puntos)

¿Cuál es el área del círculo de la figura en el que los lados del hexágono inscrito, de manera consecutiva, son: 1, 1, 1, 2, 2, 2?



Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)

La media de seis números reales distintos es 275, la media de los cuatro más pequeños es 200 y la media de los cuatro mayores es 340. ¿Cuál es la media de los dos centrales?

Problema 2A. (1,5 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula el perímetro de un rectángulo cuya área es $\frac{2T+1}{8}$ y su diagonal $\frac{T}{2}$.

Problema 3A. (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior y k un número real tal que el área de la región situada por encima del eje de abscisas y formada por los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades: $|2x| + |y| \leq 2k$; $|x| + |y| \geq k$ es T . Calcula k .

Problema 1B. (1 punto)

Si a es la solución de la ecuación $\log_{\sqrt{2}} x = 20$, calcula $\log_2 \sqrt{a}$.

Problema 2B. (1,5 puntos)

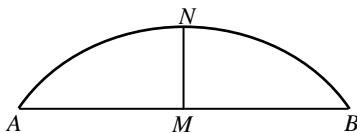
Sea T la respuesta del problema anterior. En “Relevoslandia” la unidad monetaria es el “relev”. Esteban tiene billetes de 20 relevs y billetes de 80 relevs, siendo la media de relevs por billete $7T - 1$. ¿Cuál es el menor número de billetes que puede tener Esteban?

Problema 3B. (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior. Antonio tiene $\frac{T}{15}$ monedas y Beatriz $\frac{T}{6}$ todas perfectamente equilibradas. Cada uno tira sus monedas y gana quien obtenga más caras. Si la probabilidad de que gane Antonio es $\frac{p}{q}$, fracción irreducible, calcula $p + q$.

Problema 4. (5 puntos)

Sean a y b las respuestas de los problemas 3A y 3B, respectivamente y sea $k = 3(b - a)$. En la figura se observa un segmento circular en el que la cuerda AB es kn y la flecha, MN , es n . Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor de n para el que el radio del círculo al que pertenece dicho segmento circular, sea también un entero positivo?



XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid
--

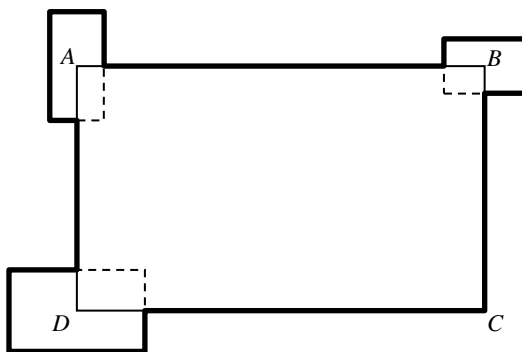
18 de noviembre de 2017

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. Las edades de Carlos, Hugo y Elvira vienen dadas por números enteros. Hugo tiene 65 años y la suma de las edades de Carlos y Elvira es 100 años. Hace 9 años la edad de Elvira era un número múltiplo de 17 que, además, no era primo con el número de la edad actual de Hugo. ¿Cuál es la edad actual de Carlos?

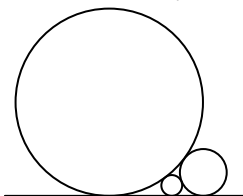
2. Los números $A = 878\,787\,878\,787$ y $B = 787\,878\,787\,878$, de 12 cifras cada uno, están formados sólo por setes y ochos. ¿Cuál es su máximo común divisor?

3. El perímetro del rectángulo $ABCD$ es de 30 cm. Dibujamos otros tres rectángulos cuyos centros son los vértices A , B y D y sus lados paralelos a los del rectángulo $ABCD$, como muestra la figura que no está hecha a escala. Si la suma de los perímetros de estos tres rectángulos es 20 cm, ¿cuál es el perímetro del polígono cuyos lados están marcados con línea gruesa?

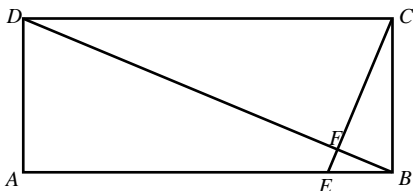


PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. En la figura adjunta se observan tres circunferencias tangentes entre sí y también tangentes a una recta. Si los radios de las circunferencias mayores miden 36 y 9, ¿cuánto mide el radio de la pequeña?



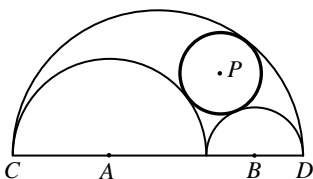
2. En el rectángulo $ABCD$ de la figura, $AB = 24$ y $AD = 10$. El segmento CE es perpendicular a la diagonal BD y el punto F la intersección de ambos segmentos. ¿Cuál es la longitud del segmento EF ?



3. ¿Cuántos números de cinco cifras, que empiecen por 37, verifican que tanto $[37abc]$, como $[37bca]$ y $[37cab]$ son múltiplos de 37? Por ejemplo: 37296, 37962 y 37629 son tres de ellos.
Nota. La expresión $[37abc]$ representa al número cuyas cifras son 3, 7, a, b, c.

PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. En la figura se observan dos semicircunferencias de centros A y B y radios 2 y 1 respectivamente. Otra semicircunferencia de diámetro CD , tangente exterior a ambas semicircunferencias y una circunferencia de centro P que es tangente a las tres semicircunferencias anteriores. ¿Cuál es el radio de esta circunferencia de centro P ?

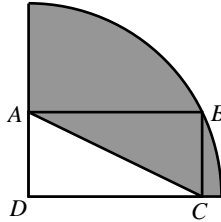


2. Sean x e y números reales tales que $|x| \neq |y|$ y que verifican las ecuaciones
- $$\left. \begin{aligned} x^3 &= 13x + 3y \\ y^3 &= 3x + 13y \end{aligned} \right\} . \text{ Calcular } (x^2 - y^2)^2 .$$
3. Determinar el valor de $x + y$ sabiendo que:
- $$\left\{ \begin{aligned} [x] + [y] + y &= 43,8 \\ x + y - [x] &= 18,4 \end{aligned} \right.$$

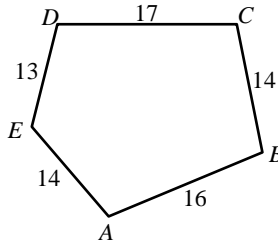
Nota. $[a]$ es la parte entera de a , es decir, el mayor entero menor o igual que a .

PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

1. En la figura adjunta se observa un cuadrante de circunferencia de centro D y radio r y un rectángulo $ABCD$ inscrito en el cuadrante. Si el perímetro del rectángulo es 16 y el perímetro de la región sombreada es $10 + 3\pi$, ¿cuál es el valor del radio r ?



2. Escribimos en una lista todos los números enteros desde el 1 hasta el 2017. Si suprimimos todos los cuadrados perfectos y también todos los cubos perfectos, ¿cuántos números nos quedarán en esa lista?
3. Se considera el pentágono $ABCDE$ de la figura en el que se indican las longitudes de sus lados. Con centro en cada uno de sus vértices, dibujamos cinco circunferencias de forma que las que tienen por centro dos vértices del mismo lado son tangentes entre sí. ¿Cuál es el centro de la mayor que hemos dibujado y cuál es su radio?



4. Las nueve casillas del “cuadrado mágico” de la figura están ocupadas por los nueve divisores de 100. (El producto de los números de cada fila, cada columna y cada diagonal es el mismo). Si el 20 y el 1 ocupan las casillas que muestra la figura, ¿qué número ocupará la casilla sombreada?

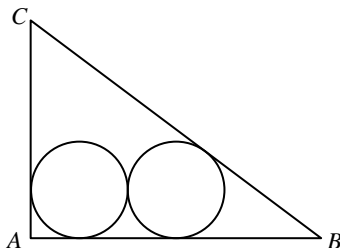
2	1	

PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

1. ¿Hay algún triángulo en el que las medidas de sus ángulos, en grados sexagesimales, vengan dadas por números enteros y que verifiquen que la suma de la medida de uno de ellos más el producto de las medidas de los otros dos sea 2017?

Indicación. Te puede ayudar saber que 919 es un número primo.

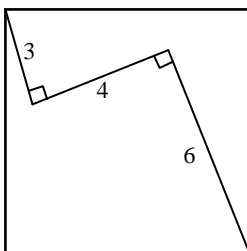
2. En el triángulo rectángulo ABC , de catetos $AC = 3$ y $AB = 4$, inscribimos dos circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del triángulo como se muestra en la figura. Calcula el radio de las circunferencias.



3. En un trayecto en tren entre dos ciudades, una hora después de la salida, el tren se detuvo por un pequeño fallo mecánico que se solucionó en media hora pero que hizo que el tren continuara su viaje a la mitad de la velocidad normal. Por esta circunstancia llegó a su destino con dos horas de retraso. Expertos consultados aseguraron que si la avería se hubiera producido 100 km más adelante, la demora habría sido de sólo una hora. ¿Cuál es la distancia que separa a estas dos ciudades?

Nota. Suponemos que el tren circula siempre a velocidad constante.

4. Calcula el área del cuadrado de la figura.

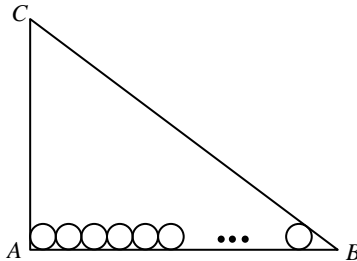


PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

1. Los números x, y, z , son enteros. ¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema?

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 - z^2 &= 31 \\ -x^2 + 6yz + 2z^2 &= 44 \\ x^2 + xy + 8z^2 &= 100 \end{aligned} \right\}$$

2. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (x, y) tales que $4^y - 615 = x^2$.
3. En el triángulo rectángulo ABC , de catetos $AC = 3$, $AC = 4$, inscribimos n circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del triángulo como se muestra en la figura. ¿Para qué valor de n se verifica que el radio de cada una de ellas es $\frac{1}{2017}$?



4. El número $21!$ Tiene más de 60000 divisores (positivos). Si elegimos al azar uno de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que sea impar?

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

- 1A.-** El peso total de un frasco y su contenido, que son 20 pastillas idénticas, es 180 gramos. Cuando el frasco contiene 15 pastillas vemos que el peso total es 165 gramos. ¿Cuántos gramos pesa el frasco?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

- 1B.-** Sea "T" la respuesta del problema 2B
Los números m , n , p y q son enteros positivos y diferentes.
Si además satisfacen la ecuación $(7-m)(7-n)(7-p)(7-q)=T$, ¿cuál es el valor de su suma?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

- 1C.-** Sea "T" la respuesta del problema 2C.

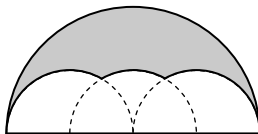
En el último examen de Matemáticas de mi clase la nota media ha sido $5 + \frac{T}{100}$. Si

la nota media de las chicas fue de 6 y la de los chicos de 5, ¿cuántos estudiantes hay en mi clase si no puede haber más de 30?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3º y 4º de ESO.-

- 2A.-** Sea "T" la respuesta del problema 3A.
En la figura adjunta se observa un semicírculo de radio T , y tres semicírculos iguales de radio $\frac{T}{2}$. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?.



(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

- 2B.-** En un cajón hay 3 calcetines blancos, 2 negros y 5 rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el número mínimo de calcetines que hay que sacar para estar seguros de que sacamos dos del mismo color?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

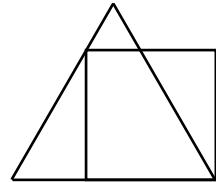
Dos trenes viajan a velocidad constante. El más lento recorre en 15 minutos $\frac{T}{27}$ km menos que el más rápido y tarda 15 segundos más que el más rápido en recorrer 4 km. ¿Cuál es, en km/h, la velocidad del tren más rápido?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

Bachillerato.-

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.

En la figura se observa un triángulo equilátero y un cuadrado de perímetro T que tiene un vértice común con el triángulo y otros dos en lados del triángulo. Si escribimos el perímetro del triángulo como $a + b\sqrt{3}$ con a y b enteros positivos, ¿calcula el número $\frac{a}{b}$?



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.

Los puntos $A\left(\frac{T}{2}, 92\right)$; $B(17, 76)$ y $C(19, 84)$ son los centros de tres círculos de radio 3. Una recta que pasa por el punto B corta a los tres círculos de forma que la suma de las áreas de los trozos de círculo que deja a cada lado es la misma. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- El producto de las edades de un padre y sus dos hijos es 4018. Si actualmente el padre tiene menos de 45 años, ¿qué edad tenía cuando nació el hijo mayor?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA****LIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA****Comunidad de Madrid****FASE CERO: viernes 24 de noviembre de 2017**

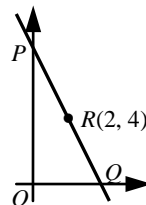
- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

1. Colocamos cifras en los huecos del número $2\square\square$, una en cada hueco, para formar un número de tres cifras. ¿De cuántas formas podemos hacerlo para que el número obtenido sea mayor que 217?

A) 81 B) 82 C) 83 D) 92 E) 93

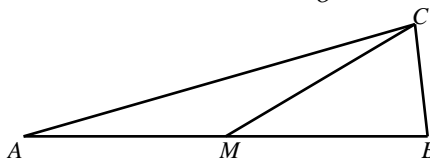
2. En la siguiente gráfica el punto P está en el eje OY , Q es el $(4, 0)$ y la recta PQ pasa por el punto $R(2, 4)$. ¿Cuál es el área del triángulo OPQ ?

A) 8 B) 12 C) 32 D) 24 E) 16



3. En el triángulo de la figura, el punto M es el punto medio del lado AB , $\widehat{CMB} = 30^\circ$ y $\widehat{CAB} = 15^\circ$. ¿Cuánto mide el ángulo \widehat{CBA} ?

A) 75° B) 65° C) 60° D) 80° E) 85°



4. Jorge tiene 144 cubitos idénticos de 1 cm de arista. Utiliza todos para construir un prisma rectangular cuya base tiene un perímetro de 20 cm, pero hay distintas posibilidades. ¿Cuál es la suma de todas las posibles alturas del prisma?

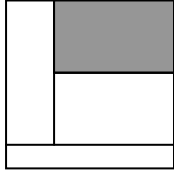
A) 31 B) 25 C) 15 D) 22 E) 16

5. Irene es más baja que Jorge, Francisco es más alto que Gustavo, Jorge es más alto que Francisco y Herminia es más baja que Gustavo. ¿Quién es el más alto?

A) Francisco B) Gustavo C) Herminia D) Irene E) Jorge

6. El cociente entre la longitud del lado menor de un rectángulo y la longitud del lado mayor es igual al cociente del lado mayor y la diagonal. ¿Cuál es el cuadrado del cociente entre la longitud del lado menor y la diagonal?

A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$

7. En el triángulo ABC , $AB = 6$, $AC = 8$ y $BC = 10$. Si D es el punto medio del lado BC , ¿cuál es la suma de los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ADB y ADC ?
- A) $1 + \sqrt{5}$ B) $\frac{11}{4}$ C) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ D) $\frac{17}{6}$ E) 3
8. El cuadrado $PQRS$, de lado 42, está dividido en cuatro rectángulos del mismo perímetro, tal y como muestra la figura. ¿Cuál es el área del rectángulo sombreado?
- A) 252 B) 432 C) 441 D) 490
E) 540
- 
9. Las longitudes de los lados de un triángulo obtusángulo son: 10, 17 y x . Si x es un número entero, ¿cuál es la suma de los posibles valores de x ?
- A) 161 B) 148 C) 63 D) 323 E) 224
10. La región del espacio formada por los puntos que distan 3 unidades del segmento AB tiene por volumen 216π . ¿Cuál es la longitud de dicho segmento?
- A) 6 B) 12 C) 18 D) 20 E) 24
11. Conduciendo a velocidad constante, Alberto tarda 3 horas en ir desde su casa a casa de sus padres. Un día empezó a conducir a su velocidad habitual pero, después de llevar la tercera parte del camino, empezó a llover y redujo su velocidad en 20 km/h, tardando en total 276 minutos. ¿Qué distancia hay entre la casa de Alberto y la de sus padres?
- A) 132 km B) 135 km C) 138 km D) 141 km E) 144 km
12. Isa tiene 30 varillas, de longitudes enteras y diferentes, entre 1 y 30 cm. Toma tres de ellas, de longitudes 3 cm, 7 cm y 15 cm y las coloca encima de una mesa. Debe elegir una cuarta para formar con las cuatro un cuadrilátero. ¿Cuántas de las 27 restantes puede elegir?
- A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20
13. En un triángulo rectángulo, de lados 3, 4 y 5, inscribimos de dos formas diferentes dos cuadrados. El primero, de lado x , tiene un vértice que coincide con el vértice del triángulo correspondiente al ángulo recto. El segundo, de lado y , tiene dos vértices consecutivos en la hipotenusa. ¿Cuál es el valor de $\frac{x}{y}$?
- A) $\frac{12}{13}$ B) $\frac{35}{37}$ C) 1 D) $\frac{37}{35}$ E) $\frac{13}{12}$
14. En el rectángulo $ABCD$, $AB = 3$ y $BC = 4$. El punto E es el pie de la perpendicular desde B a la diagonal AC . ¿Cuál es el área del triángulo AED ?
- A) 1 B) $\frac{42}{25}$ C) $\frac{28}{15}$ D) 2 E) $\frac{54}{25}$

15. Prolongamos por B el diámetro AB , de una circunferencia de radio 2, hasta un punto D de tal forma que $BD = 3$. Elegimos un punto E tal que $ED = 5$ y los segmentos ED y AD sean perpendiculares. El segmento AE corta a la circunferencia en el punto C , entre A y E . ¿Cuál es el área del triángulo ABC ?

- A) $\frac{100}{37}$ B) $\frac{140}{39}$ C) $\frac{145}{39}$ D) $\frac{140}{37}$ E) $\frac{120}{31}$

16. ¿Cuántos enteros positivos menores o iguales que 2017, escritos en la notación habitual, llevan la cifra cero?

- A) 469 B) 471 C) 475 D) 478 E) 481

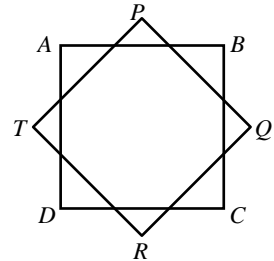
17. Si a y b son números reales positivos y las raíces de las ecuaciones $x^2 + ax + 2b = 0$ y $x^2 + 2bx + a = 0$ son todas reales, el menor valor posible $a + b$ es:

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18. La ecuación $\left| |x-2| - 1 \right| = a$ tiene exactamente tres raíces reales. ¿Cuál es el valor de a ?

- A) 0 B) 1 C) $\frac{7}{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) 3

19. En la figura adjunta se observan dos cuadrados: el $ABCD$, de área S , y el $PQRT$, de área S' . Si los puntos de intersección dividen a los lados del cuadrado $ABCD$ en tres partes iguales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



- A) $S = S'$ B) $2S = 3S'$ C) $5S = 6S'$
 D) $8S = 9S'$ E) Nada de lo anterior

20. El número x es positivo y $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. ¿Cuánto vale $x^5 + \frac{1}{x^5}$?

- A) 55 B) 63 C) 322 D) 123 E) $49\sqrt{7}$

21. Si x e y son números positivos que verifican $[x] \cdot x = 36$, $[y] \cdot y = 71$, $x + y$ es igual a:

- A) $\frac{107}{8}$ B) $\frac{119}{8}$ C) $\frac{125}{9}$ D) $\frac{107}{6}$ E) $\frac{101}{7}$

Recuerda: $[a]$ “parte entera de a ” es el mayor entero menor o igual que a .

22. Pedro elige tres enteros positivos a , b y c . Quino determina el valor de $a + \frac{b}{c}$ y obtiene como respuesta 101. Rosa calcula $\frac{a}{c} + b$ y obtiene 68. Sara determina el valor de $\frac{a+b}{c}$ y obtiene como resultado k . ¿Cuál es el valor de k ?
- A) 13 B) 168 C) 152 D) 12 E) 169
23. Amalia tiene una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara al realizar un lanzamiento es de $\frac{1}{3}$ y Bruno tiene otra en la que la probabilidad de obtener cara es de $\frac{2}{5}$. Tira cada uno, alternativamente, su moneda empezando Amalia y gana el primero que obtenga cara. Si $\frac{p}{q}$, irreducible, es la probabilidad de que gane Amalia, $q - p$ es igual a:
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
24. En el triángulo equilátero ABC prolongamos desde B el lado AB hasta el punto B' de tal manera que $BB' = 3AB$. Análogamente en los otros dos lados: $CC' = 3BC$ y $AA' = 3CA$. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo $A'B'C'$ y el área del triángulo ABC ?
- A) 9 B) 16 C) 25 D) 36 E) 37
25. ¿Cuántos triángulos hay que tengan los vértices en los puntos (i, j) donde i y j son enteros del 1 al 5, ambos inclusive?
- A) 2128 B) 2148 C) 2154 D) 2160 E) 2300
26. Sea S el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que dos de los tres números, 3, $(x + 2)$, $(y + 4)$ son iguales y el tercero es menor o igual que esos otros dos. ¿Cuál de las siguientes es una correcta descripción de S ?
- A) S es un punto B) S es un par de rectas que se cortan C) S es un triángulo
D) S es: tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos diferentes
E) S es: tres semirrectas con un punto común
27. Los lados AB y AC del triángulo equilátero ABC son tangentes a una circunferencia en los puntos B y C , respectivamente. ¿Qué fracción del área de dicho triángulo cae fuera de la circunferencia?
- A) $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi - \frac{1}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$ E) $\frac{4}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$

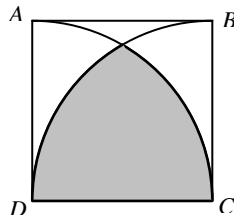
28. Los tres vértices del triángulo equilátero están en la hipérbola $x \cdot y = 1$, siendo uno de los vértices de la hipérbola el baricentro del triángulo. ¿Cuál es el área de dicho triángulo?

A) $\sqrt{48}$ B) $\sqrt{60}$ C) $\sqrt{108}$ D) $\sqrt{120}$ E) 13

29. En un cuadrado de lado a trazamos dos cuadrantes de circunferencia, como muestra la figura, con centros en A y B . ¿Cuál es el área de la parte sombreada?

A) $\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2$ B) $\frac{1}{6}a^2$ C) $\frac{\pi}{6}a^2$

D) $\frac{\sqrt{3}-1}{6}a^2$ E) Faltan datos



30. Si $f(x) = \operatorname{sen} x + 2 \cos x + 3 \operatorname{tg} x$ (con x en radianes), ¿en qué intervalo está el menor valor positivo de x para el que $f(x) = 0$?

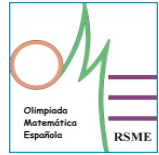
A) (0, 1) B) (1, 2) C) (2, 3) D) (3, 4) E) (4, 5)



REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

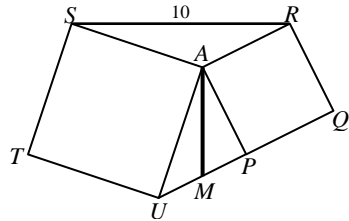


FASE LOCAL: segunda prueba. Viernes 20 de diciembre de 2017

Tiempo: 3h 30 min

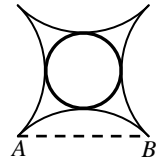
1. Considera un entero N de cinco cifras. Forma el entero P , de seis cifras, colocando un 2 al comienzo de N , y el entero Q , también de seis cifras, colocando un 2 al final de N . Si $Q = 3P$, escribe todos los valores posibles de N .

2. En la figura adjunta se observan dos cuadrados: $APQR$ y $ASTU$, que tienen un vértice común, A . Si $SR = 10$ y M es el punto medio de UP , calcula la longitud de AM .



3. Norine tiene una lista de varios enteros consecutivos y efectúa el producto de todos ellos obteniendo como resultado un número N , de seis cifras, que empieza por 47 y acaba en 74. ($N = 47\dots74$). Escribe la lista que tiene Norine.

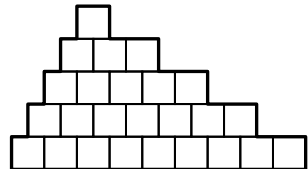
4. En la figura adjunta puedes ver una circunferencia tangente a cuatro arcos iguales, siendo cada uno de ellos la cuarta parte de una circunferencia. Si $AB = 2$ cm, calcula el radio de la circunferencia.



5. Con cuatro dígitos diferentes, ninguno igual a cero, sabes que es posible formar 24 números de cuatro cifras cada uno, todos distintos. ¿Cuál es el mayor divisor primo de la suma de estos 24 números?

6. En la figura puedes ver una “pirámide” de cuadrados de lado 1 con las siguientes condiciones:

- El número de cuadrados de la fila de abajo es impar (nueve en el dibujo)
- Cada fila, salvo la de abajo, tiene dos cuadrados menos que la que tiene debajo.
- Cada cuadrado se apoya en dos cuadrados de la fila que tiene debajo.
- En la fila superior hay un cuadrado solo.



Si la “pirámide” tiene n filas, encuentra una relación que exprese su área A en función de su perímetro P .

7. Los habitantes del planeta *EMO* son rojos o verdes y tienen 2, 3 ó 4 cabezas. Colocamos en fila a seis de ellos, cada uno con una de las seis características citadas, es decir, R2, R3, R4, V2, V3, V4, de forma que cualesquiera dos que estén juntos difieren en el color y en el número de cabezas. ¿De cuántas formas los podemos colocar en esa fila?
8. El entero positivo N tiene exactamente seis divisores. Si el producto de cinco de ellos es 648, ¿cuál es el otro divisor de N ?
9. Hugo y María, ambos con menos de 80 años pero más de 10, observan que si escriben sus edades una a continuación de la otra, primero la de Hugo, obtienen un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. A continuación, Hugo se da cuenta de que eso volverá a pasar dentro de 17 años. ¿Cuál es la edad actual de Hugo?
10. Para el conjunto $\{a, b, c, d\}$ la suma de todos los productos de dos factores de sus elementos es:
 $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ y la suma de todos los productos de tres factores es:
 $abc + abd + acd + bcd$.
Sea $f(n)$ la suma de los productos de n factores de los 2017 primeros enteros positivos.
Así por ejemplo $f(1) = 1 + 2 + \dots + 2017$.
¿Cuál es el valor de $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017)$?



LIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Prueba de selección Comunidad de Madrid



Primera sesión, viernes 19 de enero de 2018

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

- Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $2x^3 + x^2 + 2x + 1$, $x^4 - 1$
- Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4.
- Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45^\circ$ y $\angle ACB = 30^\circ$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

Segunda sesión, Sábado 20 de enero de 2018

Tiempo: 3 horas y media

- Diremos que un entero positivo es “*curioso*” si puede expresarse como suma de los cuadrados de tres divisores suyos diferentes. Demostrar:
 - Cualquier número *curioso* es múltiplo de 3.
 - Hay infinitos números *curiosos*.
- Sean x, y, z números reales distintos entre sí dos a dos. Determinar todos los valores de a para que $x - \frac{y}{z} - \frac{z}{y} = y - \frac{z}{x} - \frac{x}{z} = z - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = a$.
- Se han coloreado 46 cuadrados unitarios de una cuadrícula 9×9 . ¿Hay, en la cuadrícula, alguna figura del tipo



(no necesariamente con la orientación que muestra el dibujo) con las tres casillas coloreadas?

XXIII^a OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2017



Duración de la prueba: 3 horas

Cada problema vale 10 puntos.

No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.

Justifica cada una de tus respuestas.

Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo

PROBLEMA 1

A cada número de tres dígitos Matías le sumó el número que se obtiene invirtiendo sus dígitos. Por ejemplo, al número 927 le sumó el 729. Calcular en cuántos casos el resultado de la suma de Matías es un número con todos sus dígitos impares.

PROBLEMA 2

¿Es posible pintar 33 casillas de un tablero de 9×9 de forma que cada fila y cada columna del tablero tenga como máximo 4 casillas pintadas, pero si además pintamos cualquier otra casilla aparece alguna fila o columna que tiene 5 casillas pintadas?

PROBLEMA 3

Sea $ABCD$ un rombo de lados $AB = BC = CD = DA = 13$. Sobre el lado AB se construye el rombo $BAFE$, exterior al $ABCD$ y tal que el lado AF es paralelo a la diagonal BD del $ABCD$. Si el área del $BAFE$ es igual a 65, calcular el área del $ABCD$.

PROBLEMA 4

Sea n un entero par mayor que 2. Sobre los vértices de un polígono regular de n lados se pueden colocar fichas rojas o azules. Dos jugadores, A y B, juegan alternándose turnos del siguiente modo: cada jugador, en su turno, elige dos vértices que no tengan fichas y coloca en uno de ellos una ficha roja y en el otro una ficha azul. El objetivo de A es conseguir que haya tres vértices consecutivos con fichas del mismo color. El objetivo de B es impedir que esto suceda. Al comienzo del juego no hay fichas en ninguno de los vértices.

Demostrar que independientemente de quien empiece a jugar, el jugador B siempre podrá conseguir su objetivo.

PROBLEMA 5

Diremos que dos números enteros positivos a y b forman una *pareja adecuada* si $a+b$ divide a ab (su suma divide a su multiplicación). Hallar 24 números enteros positivos que se puedan distribuir en 12 parejas adecuadas, y de modo que cada número entero figure en una sola pareja y el mayor de los 24 números sea lo menor posible.

Segundo Nivel

PROBLEMA 1

Decimos que un número entero positivo es *ascendente* si sus cifras leídas de izquierda a derecha están en orden estrictamente creciente. Por ejemplo, 458 es ascendente y 2339 no lo es.

Hallar el mayor número ascendente que es múltiplo de 56.

PROBLEMA 2

Varios números reales diferentes están escritos en el pizarrón. Si a , b , c son tres de estos números, distintos entre sí, al menos una de las sumas $a+b$, $b+c$, $c+a$ también es uno de los números del pizarrón. ¿Cuál es la mayor cantidad de números que pueden estar escritos en el pizarrón?

PROBLEMA 3

En un cuadrilátero $ABCD$ se cumple que $\hat{A}BC = \hat{A}DC = 90^\circ$ y $\hat{B}CD$ es obtuso. En el interior del cuadrilátero se ubica el punto P tal que $BCDP$ es un paralelogramo. La recta AP corta al lado BC en M . Además $BM = 2$, $MC = 5$ y $CD = 3$.

Determinarla longitud de AM .

PROBLEMA 4

Consideramos todos los números de 7 dígitos que se obtienen permutando de todas las maneras posibles los dígitos de 1234567. ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 7?

PROBLEMA 5

Ababa juega con una palabra formada por las letras de su nombre y se ha puesto ciertas reglas:

Si encuentra una A seguida inmediatamente de una B las puede sustituir por BAA.

Si encuentra dos B consecutivas las puede borrar.

Si encuentra tres A consecutivas las puede borrar.

Ababa empieza con la palabra ABABABAABAAB. Con las reglas anteriores, ¿cuántas letras tiene la palabra más corta a la que puede llegar? ¿Por qué no puede llegar a una palabra más corta?

XXIII OLIMPIADA DE MAYO – 2017. RESULTADOS DE ESPAÑA

PRIMER NIVEL

Apellidos y nombre	Premio
1 Álvaro Gamboa Rodríguez	ORO
2 Sergio Pérez Plaza	PLATA
3 Félix García Taboada	PLATA
4 Alejandro Krum de Vicente	BRONCE
5 Pablo Robles	BRONCE
6 Pablo Cobo Cuenca	BRONCE
7 Jaime Martins-Soares Larrinaga	BRONCE
8 Nieves Fernández González	MENCIÓN
9 Miguel Garniza del Amo	MENCIÓN
10 Enrique Matorras Muñoz	MENCIÓN

SEGUNDO NIVEL

1 Javier Nistal Salas	ORO
2 Gabriel Salov	PLATA
3 Jimena Lozano Simón	PLATA
4 Víctor David Sánchez González	BRONCE
5 Marta Bonilla Rangel	BRONCE
6 Inés Blanco Rivas	BRONCE
7 Daniel Mecha Martín	BRONCE
8 Pablo López Renedo	MENCIÓN
9 Miguel Navarro Muñoz	MENCIÓN
10 Jorge Carrasco Coquillat	MENCIÓN



**Comunidad
de Madrid**



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

