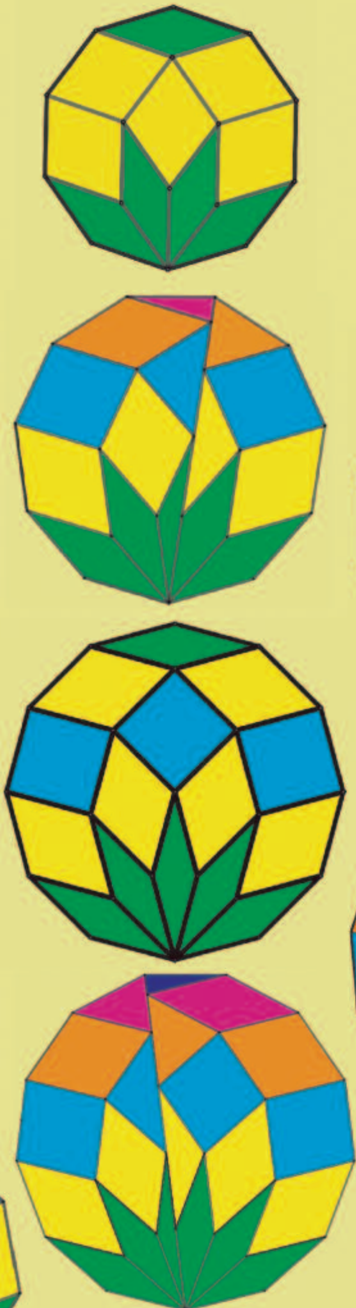
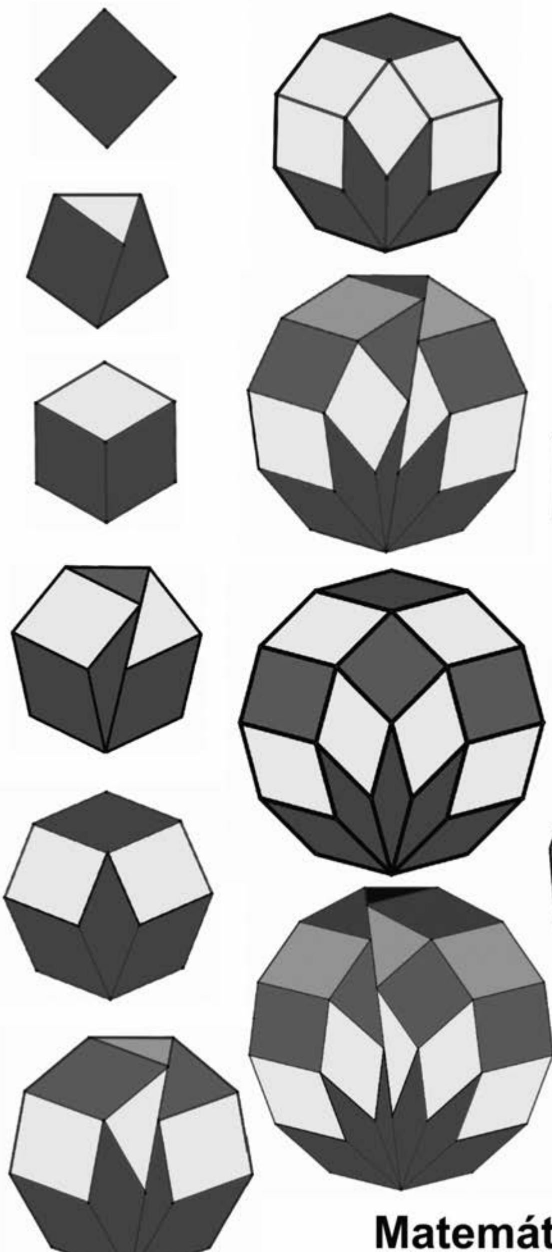


XXIV Concurso de Primavera

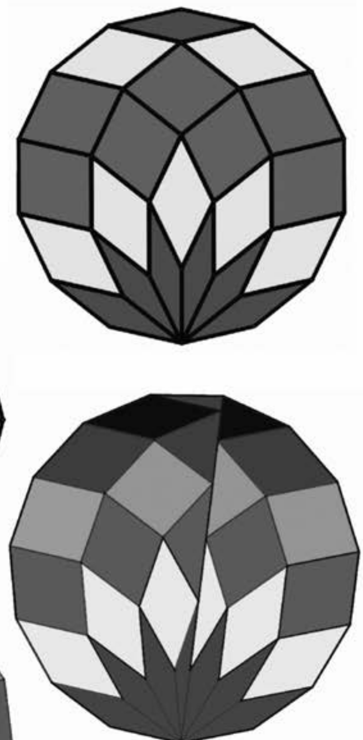
Matemáticas

2020

Comunidad de Madrid



XXIV
Concurso de
Primavera



Matemáticas
2020

Comunidad
de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Alzola Bujarrabal, Belén
Baeza Alba, Miguel Ángel
Benito Miguel, Isabel
Castrillón López, Marco
Donaire Moreno, Juan Jesús
Esteban García, María
Ferrero de Pablo, Luis
García Gual, Jesús
Gaspar Alonso-Vega, María
González Ortega, Jorge
Martínez Dalmau, Pablo
Martínez Sanz, Alfredo
Montero Estravís, Xiomara
Moreno Warleta, María
Ramírez Carrillo, Carlos
Sánchez Benito, Merche
Sánchez González, Víctor Manuel
Serrano Marugán, Esteban
Soler Areta, Javier
Sordo Juanena, José María
Tomé Grasa, Roberto

Edita: Asociación Matemática Concurso de Primavera

ISBN: 978-84-608-5881-2

Deposito Legal: M-8301-2017

In memoriam

A Francisco,
nuestro buen corregidor:
¡Un punto y aparte!

El árbol de Farey

(Una curiosa ordenación de los racionales entre 0 y 1)

$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$
$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{4}$
$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{4}{5}$
$\frac{1}{6}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{3}{11}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{4}{11}$ $\frac{5}{13}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{4}{9}$ $\boldsymbol{\frac{5}{9}}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{8}{13}$ $\frac{7}{11}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{8}{11}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{5}{6}$

Para hallar el que ocupa el lugar vigésimo tercero, escribimos 23 en sistema binario, 10111_2. Contamos de izquierda a derecha los grupos de unos y ceros seguidos que hay en el número binario obtenido: (1,1,3). Añadimos un 1 al último número de esa lista, (**1**, **1**, **4**) y leemos esta serie final como desarrollo en fracción continua de un racional entre 0 y 1:

$$[0; \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{4}] = \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{4}}}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}$$

(El orden va de arriba a abajo por filas y de derecha a izquierda en cada fila)

https://www.sacred-geometry.es › fracciones-continuas

AGRADECIMIENTOS:

A los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores.

A los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase.

A la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

A la Subdirección General de Formación del Profesorado de la
Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la
Consejería de Educación, Juventud y Deporte Comunidad de Madrid

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

A Smartick.

ÍNDICE

ENUNCIADOS DE LA 1ª FASE:

ENUNCIADOS DE LA 2ª FASE:

SOLUCIONES:

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 13 de febrero de 2019

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

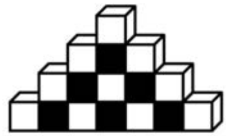
COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

1 Un cuarto de mandarina son dos gajos y medio. ¿Cuántas mandarinas son 65 gajos?

A) Trece **B)** Tres y un cuarto **C)** Seis y media
D) Doce y media **E)** Veintiséis

2 Combinando cubos blancos y negros Miguel hace construcciones como la de la figura, que tiene cuatro pisos. Si en su colección de cubos hay 70 cubos blancos y 50 cubos negros, ¿cuántos pisos tiene la construcción más alta que puede construir siguiendo ese patrón de colores?



A) 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 25

3 Julián y Lucía juegan a ver quién llega más lejos en el lanzamiento de aviones de papel. El avión de Julián planea un rato y se posa a dos metros y medio del punto de lanzamiento. El de Lucía sale con ímpetu y se estrella a 370 centímetros del punto de lanzamiento. ¿Cuántos decímetros de diferencia hay entre el ganador y el perdedor?

A) 12 **B)** 21,3 **C)** 62 **D)** 34,5 **E)** 16,5

4 Los habitantes del planeta Trescatorce tienen tres manos y catorce pies. En cada mano tienen tres dedos y en cada pie tienen catorce. A mi cumple invité a tres colegas de Trescatorce y a cinco de la Tierra. Contándome a mí, que soy de la Tierra, ¿cuántos dedos tenemos entre todos los que estuvimos en la fiesta?

A) 735 **B)** 725 **C)** 222 **D)** 630 **E)** 645

5 Al concierto de *Los Irracionales* que se celebró en el planeta Trescartorce asistieron 19 987 trescatorcianos. ¿Qué número aproxima mejor la cantidad de dedos que había en el concierto?

A) 4 000 000 **B)** 300 000 **C)** 800 000 **D)** 3 000 000 **E)** 400 000

6 La bruja Piruja lee la receta de su poción contra el dolor de muelas: "Ingredientes: 2 colas de lagartija, 51 patas de araña peluda, 4 lenguas de escorpión, 15 huevos podridos, 39 dientes de ajo y una pizca de polvos de talco". Cuando va a la despensa se da cuenta de que solo tiene 26 dientes de ajo y decide hacer menos cantidad. ¿Cuántas patas de araña peluda tendrá que poner si utiliza los 26 dientes de ajo?

A) 38 **B)** 17 **C)** 34 **D)** 25 y media **E)** 32 y media

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

7 Mi reloj de pulsera marca ahora las 11 de la mañana, ¿qué hora marcará dentro de 100 horas?

A) Las 3 de la tarde **B)** Las 4 de la mañana **C)** Las 5 de la tarde
D) Las 6 de la tarde **E)** Las 7 de la mañana

8 El octógono que rodea la figura tiene 48 cm^2 de área. ¿Cuál es el área, en cm^2, del octógono interior dibujado con trazo grueso?

A) 40 **B)** 36 **C)** 32
D) 28 **E)** 24

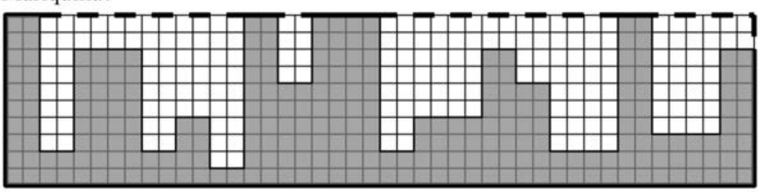
9 Hoy en casa hemos comido mi menú favorito: de primero brócoli, de segundo caballa y de postre natillas! Mis padres se organizan con las comidas de forma muy sistemática y vengo observando que ponen brócoli cada 6 días, caballa cada 10 días y natillas cada 15 días. ¿Dentro de cuántos días volveré a comer por primera vez mi menú favorito?

A) 90 **B)** 60 **C)** 40 **D)** 30 **E)** 20

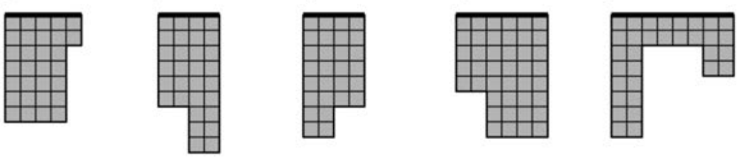
10 En la multiplicación ♥♣ × 7 = 4♣♣, ♣ y ♥ representan cifras distintas. ¿Cuánto vale ♣ + ♥?

A) 8 **B)** 11 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 14

11 Mariquilla encontró una cartulina gris con borde negro y recortó trozos hasta dejar esta bonita silueta de una ciudad. ¿Qué trozo no puede ser uno de los recortados por Mariquilla?

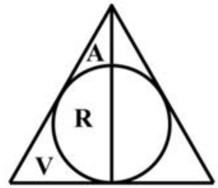


A) **B)** **C)** **D)** **E)**



XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

12 Con tres lápices: rojo (R), azul (A) y verde (V), Harry Potter se entretiene coloreando el símbolo de las *Reliquias de la Muerte*. Ya coloreó la mitad izquierda como ves en la figura, ¿de cuántas formas distintas puede colorear la mitad derecha de manera que dos regiones que comparten frontera no tengan el mismo color?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

13 Mulán es más rauda que un río bravo. Para comprobarlo posa su barco en el río y comienza a correr río abajo. Corre 4,5 kilómetros en media hora y se sienta a esperar que llegue el barco. Si el barco aún tarda 15 minutos en llegar, ¿cuántos kilómetros recorre el barco en una hora?

A) 2,5 **B)** 4,75 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

14 Amaia canta en la ducha a voz en grito esta monótona canción : "La felicidad a-a-a-a, la felicidad a-a-a-a, la felicidad a-a-a-a,…". Siempre acaba su ducha completando una frase. Si hoy al terminar su ducha ha pronunciado la letra **i** 348 veces, ¿cuál es la suma de las cifras del número de veces que ha pronunciado la letra **a**?

A) 16 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 11 **E)** 9

15 Jesús *recorre* 4 km en su bicicleta estática en 10 minutos. ¿Cuántos metros *recorrerá* en 4 minutos si mantiene esa velocidad media?

A) 1600 **B)** 1500 **C)** 1800 **D)** 1450 **E)** 1480

16 La ballena jorobada es el mamífero que realiza la migración más larga. Cada año abandona el Polo Sur, se dirige hasta las playas del norte de Costa Rica y después regresa a su lugar de origen. La longitud total del viaje es de unos 17 000 km. Una ballena jorobada vive entre 45 y 50 años. ¿Qué número aproxima mejor los metros que recorre una ballena jorobada en su vida?

A) 800 000 **B)** 8 millones **C)** 80 millones **D)** 800 millones **E)** 8000 millones

17 La niña Centésima tiene 61 euros entre billetes de 5 euros y monedas de 2 euros y piensa: "Si los billetes fueran monedas y las monedas fueran billetes, tendría 79 euros". ¿Cuántas monedas tiene la niña Centésima?

A) 15 **B)** 10 **C)** 6 **D)** 13 **E)** 7

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

18 En San Valentín, por una manzana me dan dos flores y un abrazo. Por una manzana y una flor me dan un abrazo y un bombón. Por un abrazo me dan una flor y un bombón. ¿Cuántas flores equivalen a una manzana?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

19 Ana, Berta y Celia son deportistas. Una es tenista, otra gimnasta y otra nadadora. La gimnasta es la más baja de las tres. Ana es más alta que la tenista. ¿Qué afirmación es cierta?

A) Ana es gimnasta **B)** Berta es nadadora **C)** Ana es nadadora
D) Ana es tenista **E)** Celia es nadadora

20 En el costurero de la abuela hay más de 40 botones y menos de 80. Si organizo los botones en montoncitos de 5, me sobran 2 botones. Si los organizo en montoncitos de 7, me faltan 3. Si los organizo de 6 en 6, ¿cuántos sobran?

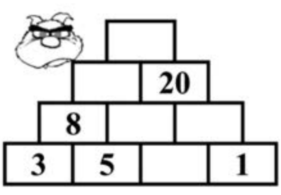
A) 5 **B)** 4 **C)** 3
D) 2 **E)** 1

21 Con fichas del *Scrabble* dos amigos escriben sus nombres CUCA y LINO y cada uno comienza a desordenar las letras de su nombre a lo loco formando palabras de 4 letras con o sin sentido: CACU, OLNI, … ¿Cuántas palabras distintas pueden formar entre los dos?

A) 36 **B)** 24 **C)** 48 **D)** 12 **E)** 16

22 En esta pirámide, el número de cada ladrillo es la suma de los dos ladrillos sobre los que se apoya. ¿Cuál es la suma de los cinco números que se ha comido Comenúmeros?

A) 78 **B)** 92 **C)** 72 **D)** 87 **E)** 76



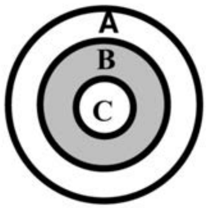
XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

23 Cuando Luca llega a la meta en una carrera de 60 m, a Inés le faltan 10 m para llegar y a Guillermo 20 m. Si Inés y Guillermo siguen corriendo a la misma velocidad que antes, ¿cuántos metros le faltarán a Guillermo para llegar a la meta cuando llegue Inés?

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

24 Lanzando tres dardos a la diana Marta clavó dos en A y uno en B y obtuvo 36 puntos. Con dos dardos en B y uno en C, Rafa obtuvo 56 puntos y Olivia obtuvo 58 puntos con dos dardos en C y uno en A. ¿Cuántos puntos obtuvo Irene con un dardo en A, otro en B y otro en C?

A) 42 **B)** 46 **C)** 48 **D)** 50 **E)** 54



25 Ya sabes que por cada respuesta correcta obtienes cinco puntos, por cada respuesta en blanco un punto y por cada respuesta incorrecta cero puntos. De los 25 problemas, Javier contestó bien a 18 y mal a 3, ¿cuántos puntos obtuvo?

A) 90 **B)** 91 **C)** 92 **D)** 93 **E)** 94

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 13 de febrero de 2019

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

1 ¡Examen sorpresa para empezar! ¡¡De números!! ¡¡¡Bien!!!
¿Cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
I. El triple de un número impar más el doble de otro número impar es siempre impar.
II. El producto de tres números consecutivos siempre es múltiplo de seis.
III. Todos los números capicúas de cuatro cifras son múltiplos de once.
IV. Todos los números de diez cifras diferentes son múltiplos de nueve.

A) Ninguna **B)** Solo una **C)** Solo dos **D)** Solo tres **E)** Todas

2 Las cinco cifras del número *abcde* son 1, 2, 3, 4, 5 pero no sabes en qué orden. Sabiendo que *abc* es múltiplo de 4, *bcd* es múltiplo de 5 y *cde* es múltiplo de 3, ¿de quién es múltiplo el número *abcde*?

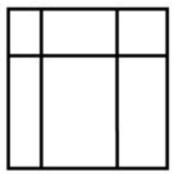
A) 7 **B)** 2 **C)** 11 **D)** 5 **E)** 13

3 Los números negativos ya han llegado.
Si $R = -(2-3)-4$, $S = 6 : (7-8)$ y $T = -3-(5-4)$, ¿cuál de estas igualdades es cierta?

A) $R+S=T+5$ **B)** $R-S=T+7$ **C)** $R\cdot T=2\cdot S$

D) $R+1=T$ **E)** $R-S+T=1$

4 Juntando seis rectángulos hemos construido un cuadrado. Si la suma de los perímetros de los seis rectángulos es 420 cm, ¿cuántos centímetros mide el lado del cuadrado formado?



A) 60 **B)** 40 **C)** 20 **D)** 15
E) 42

5 Solo una de estas cinco igualdades entre fracciones es cierta. ¿Cuál es? Y la pista ya te la hemos dado: es seguro que solo hay una igualdad verdadera.

A) $\dfrac{896\,678}{338\,444}=\dfrac{122\,426}{363\,334}$ **B)** $\dfrac{59\,976}{139\,944}=\dfrac{5\,428}{15\,339}$ **C)** $\dfrac{179\,972}{417\,946}=\dfrac{2\,856}{6\,664}$

D) $\dfrac{69\,796}{192\,994}=\dfrac{1\,966}{3\,862}$ **E)** $\dfrac{59\,976}{139\,944}=\dfrac{1\,428}{3\,332}$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

6 La niña Centésima está entrenándose y se ha marcado este ambicioso plan: empieza haciendo divisiones y por cada cinco divisiones hará seis multiplicaciones y por cada cuatro multiplicaciones hará tres restas. Si al terminar su entrenamiento ha hecho 124 operaciones, ¿cuántas multiplicaciones realizó la niña Centésima?

A) 48 **B)** 40 **C)** 52 **D)** 36 **E)** 80

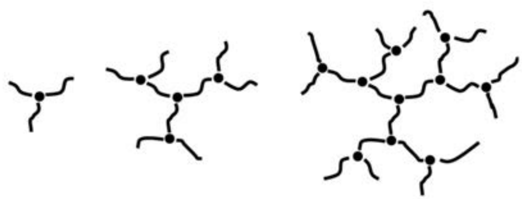
7 Si $20^{20} \cdot 30^{30} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, entonces, $a + b + c$ es igual a…

A) 132 **B)** 150 **C)** 500 **D)** 50 **E)** 200

8 Si multiplicamos todos los múltiplos de 5 comprendidos entre 1 y 101, ¿en cuántos ceros termina ese producto?

A) 22 **B)** 17 **C)** 11 **D)** 18 **E)** 20

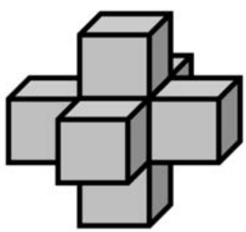
9 Fíjate bien cómo va creciendo este organismo. En la etapa 1 nació siendo un puntito y tres líneas y, a partir de ahí, en cada etapa le crece un nuevo puntito al final de cada línea y de cada nuevo puntito le nacen dos líneas. Mejor es que mires en el dibujo las tres primeras etapas de su vida. En la etapa 6, ¿cuál será la suma de sus puntitos más sus líneas?



A) 283 **B)** 305 **C)** 403 **D)** 188 **E)** 189

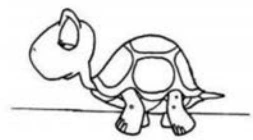
10 He pegado algunos cubos idénticos para formar esta figura sin huecos que tiene un volumen de 448 dm^3. Si ahora quiero forrar con papel plateado el exterior de la figura, ¿cuántos dm^2 de papel necesitaré?

A) 448 **B)** 320 **C)** 480 **D)** 384 **E)** 300

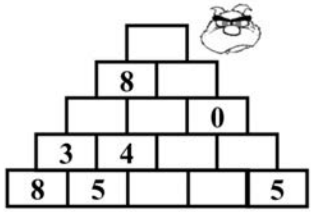


XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

11 Doña Tortu ha calculado que saliendo de su casa y caminando a 4 km/h llegará a la fiesta de las tortugas 15 minutos antes de que empiece el baile inaugural. Como está muy cansada decide ir a 3 km/h aunque así llegue 15 minutos más tarde de la hora del baile. ¿A qué distancia, en kilómetros, está la fiesta de la casa de Doña Tortu?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7



12 Esta pirámide de cifras es algo especial. En cada ladrillo se coloca la cifra de las unidades de la suma de los dos ladrillos sobre los que se apoya. ¿Cuál es la suma de los ocho números que se ha comido Comenúmeros?

A) 41 **B)** 48 **C)** 39 **D)** 53 **E)** 45

13 El número $1+\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{1+4}}$ es igual a…

A) $\frac{9}{8}$ **B)** $\frac{9}{5}$ **C)** $\frac{8}{5}$ **D)** $\frac{9}{4}$ **E)** $\frac{5}{8}$

14 Con las cifras 2, 4, 6 y 8 formamos números de cuatro cifras distintas que sean múltiplos de 4. ¿Cuántos números podemos encontrar?

A) 24 **B)** 20 **C)** 16 **D)** 12 **E)** 8

15 Tres aficionadas a la música repasan su discografía. El 15% de los discos de Ana son de Mozart; el 32 % de los de Berta son de Mozart; y el 40% de los de Carlota son de Mozart.

Lo sorprendente es que las tres amigas tienen la misma cantidad de discos de Mozart. Si sabemos que entre las tres niñas tienen menos de 300 discos, ¿cuántos tienen en total?

A) 295 **B)** 296 **C)** 280 **D)** 282 **E)** 240

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

16 En este problema hemos asignado cifras distintas a letras distintas sin utilizar el cero.

$$\begin{array}{r} \mathbf{N\ O\ T\ A\ R} \\ \times\ \mathbf{E} \\ \hline \mathbf{R\ A\ T\ O\ N} \end{array}$$

Sabiendo que la **E** vale 4, ¿cuánto vale la suma de unos traviesos

R + A + T + O + N + C + I + T + O + S?

A) 42 **B)** 44 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 43

17 Don Retorcido ha diseñado esta bonita rosa formada por rombos de 1 dm de lado. La niña Centésima la construyó usando palitos de 1 dm. Si ponemos todos sus palitos en línea recta, uno detrás de otro, ¿cuántos metros medirá?

A) 7,2 **B)** 5,6 **C)** 8,4 **D)** 6,8 **E)** 6

18 Adriana dibuja un cuadrado y su hijo Diego un triángulo equilátero. Y, ¿será telepatía?, las dos figuras tienen el mismo perímetro. Si dividimos el lado del cuadrado entre el lado del triángulo, obtenemos…

A) $\frac{1}{2}$ **B)** 2 **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{4}{3}$ **E)** $\frac{2}{3}$

19 Los números a y b con $a > b$ son enteros positivos que no son múltiplos de 10 y su producto es 20 000. ¿Cuál es el valor de $a - b$?

A) 593 **B)** 621 **C)** 437 **D)** 529 **E)** 980

20 El valor de $10^{100} + 100^{10}$ es igual a…

A) 10^{120} **B)** $10^{20}\cdot\left(1+10^{80}\right)$ **C)** 110^{110}

D) $100\cdot\left(10^{10}+1\right)$ **E)** $2\cdot 10^{100}$

21 ¿Para cuántos valores enteros positivos, a, menores que 100, se consigue que $N=\sqrt{10+a}$ sea un número entero?

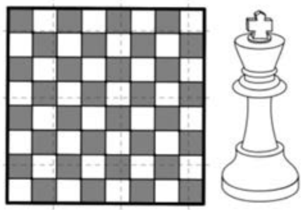
A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

22 Los cromos de don Retorcido son rarísimos. Por 36 bats te dan 9 bets; por 45 bets te dan 6 bits; por 18 bits te dan 15 bots; y por 9 bots te dan 3 buts. ¿Cuántos bats te darán por 4 buts?

A) 324 **B)** 520 **C)** 450 **D)** 360 **E)** 432

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

23 En un tablero de ajedrez (8×8), ¿cuál es el menor número de reyes que colocados en el tablero amenazan todas las casillas restantes (es decir, no hay casillas que no tengan contacto con las de los reyes)?



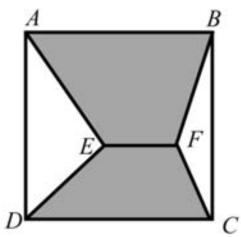
A) 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

24 Don Retorcido tiene cinco tarjetas numeradas del 1 al 5 y elige tres sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que la mayor tarjeta elegida sea la del número 4?

A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{3}{10}$ **C)** $\frac{2}{15}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{6}$

25 El lado del cuadrado *ABCD* mide 3 cm. ¿Qué área, en cm^2, ocupa la región sombreada sabiendo que *EF* mide 1 cm y es paralelo al lado *AB*?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 5,5 **E)** 6,5



XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 13 de febrero de 2019

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

1 El punto P está en el exterior de una circunferencia C en el plano. ¿Cuál es el número máximo de puntos de C que se encuentran a 3 cm de P?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 8

2 Los asistentes al último gran estreno entran en el teatro por cinco puertas distintas. Por la primera entra una persona, dos entran por la segunda, luego tres por la tercera, cuatro por la cuarta y cinco por la quinta. Después vuelve a entrar una sola persona por la primera puerta, y continúa el patrón anterior. Si Jorge es el espectador número 2019, ¿por qué puerta entró?

A) Por la primera **B)** Por la segunda **C)** Por la tercera
D) Por la cuarta **E)** Por la quinta

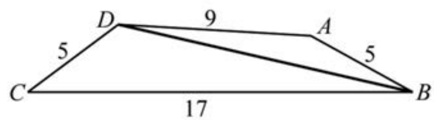
3 Dos números a y b verifican que $a + b < 0$ y $a \cdot b > 0$. De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es necesariamente cierta?

A) $a > 0$ y $b > 0$ **B)** $a < 0$ y $b < 0$ **C)** $a > 0$ y $b < 0$
D) $a > -b$ **E)** $b > -a$

4 ¿Cuál de los siguientes números es un cuadrado perfecto? (Ten en cuenta que $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)

A) $\dfrac{14! \cdot 15!}{2}$ **B)** $\dfrac{15! \cdot 16!}{2}$ **C)** $\dfrac{16! \cdot 17!}{2}$ **D)** $\dfrac{17! \cdot 18!}{2}$ **E)** $\dfrac{18! \cdot 19!}{2}$

5 En el cuadrilátero $ABCD$ de la figura, ¿cuánto mide BD si sabemos que es un entero?



A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

6 El número $\boldsymbol{n} = 1812\boldsymbol{b}42\boldsymbol{a}$ es múltiplo de 99. El valor del producto $\boldsymbol{a \cdot b}$ es…

A) 4 **B)** 18 **C)** 12 **D)** 20 **E)** 24

7 Si a es un número tal que $a^2 = a + 1$, entonces a^6 es…

A) $5a + 3$ **B)** $5a + 6$ **C)** $6a + 5$ **D)** $5a + 8$ **E)** $8a + 5$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

8 ¿Cuántos enteros positivos menores que 1000 son seis veces la suma de sus dígitos?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 5

9 Para cada entero positivo n, llamamos $s(n)$ a la suma de los dígitos de n.
Por ejemplo, $s(2019) = 12$. El valor de la suma $s(1) + s(2) + s(3) + \ldots + s(99)$ es…

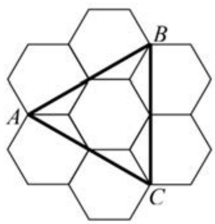
A) 746 **B)** 862 **C)** 900 **D)** 924 **E)** 1005

10 El dígito de las unidades del número $3^{2017} \cdot 7^{2018} \cdot 13^{2019}$ es:

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

11 Seis hexágonos regulares están alrededor de otro hexágono regular de lado 1 cm, como muestra la figura. ¿Cuál es, en cm^2, el área del triángulo ABC?

A) $\sqrt{3}$ **B)** 3 **C)** $3\sqrt{3}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **E)** 1



12 Si la función $f(x) = 4^x$, entonces $f(x+1) - f(x)$ valdrá:

A) $f(x)$ **B)** $2\cdot f(x)$ **C)** $3\cdot f(x)$ **D)** 4 **E)** 1

13 La suma de las soluciones enteras de $1 < (x-2)^2 < 25$ es:

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 19 **E)** 25

14 En un rectángulo $ABCD$, $AB = 6$, $AD = 30$ y G es el punto medio de AD. El punto E está en la prolongación de AB y es tal que $BE = 2$. Si el punto F es la intersección ED y BC, el área del cuadrilátero $BFDG$ es…

A) $\dfrac{133}{2}$ **B)** 67 **C)** $\dfrac{135}{2}$ **D)** 68 **E)** $\dfrac{137}{2}$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

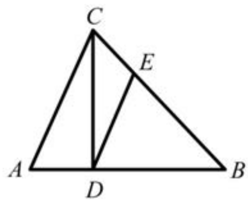
15 La policía matemática investiga a cinco sospechosos de haber robado las pruebas del Concurso de Primavera. Esto es lo que dicen al ser interrogados:

- El señor Acutángulo: ¡todos somos inocentes!
- Don Retorcido: exactamente uno de nosotros es inocente.
- La niña Centésima: no, exactamente uno de nosotros es culpable.
- El Comenúmeros: al menos dos de nosotros somos inocentes.
- La rana Gustavo: entre nosotros hay por lo menos dos culpables.

Si los inocentes siempre dicen la verdad y los culpables siempre mienten, ¿cuántos de los cinco sospechosos son culpables?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

16 En el triángulo *ABC* de la figura, *AD* es la mitad de *BD* y *CE* es un cuarto de *CB*. Sabiendo que *CD* es una de las alturas del triángulo *ABC* y que el área del triángulo *CDE* es 9 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo *ABC*?



A) 45 **B)** 54 **C)** 60
D) 63 **E)** 72

17 Esteban se está preparando para hacer un triatlón (500 m nadando, 20 km en bicicleta y 6 km corriendo). En esas distancias consigue hacer una velocidad media de 4 km/h nadando y 12 km/h corriendo. Se ha puesto como objetivo conseguir acabar el triatlón en 2 horas. ¿Cuál tiene que ser, en km/h, su velocidad media con la bicicleta?

A) $\frac{160}{11}$ **B)** 15 **C)** $\frac{76}{5}$ **D)** $\frac{61}{4}$ **E)** 16

18 Consideramos números de tres cifras con dos iguales y una distinta. ¿Cuántos hay que sean múltiplos de 3?

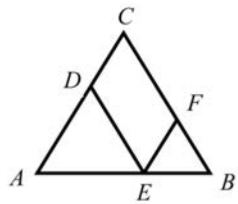
A) 63 **B)** 66 **C)** 69 **D)** 72 **E)** 75

19 Sean a y b números enteros positivos, ¿cuál de los siguientes números no puede escribirse de la forma $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$?

A) $\frac{25}{12}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **C)** $\frac{7}{3}$ **D)** $\frac{17}{4}$ **E)** $\frac{29}{10}$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

20 Sabiendo que el perímetro del paralelogramo *CDEF* es 4, ¿cuál es el área del triángulo equilátero *ABC*?



A) 8 **B)** $\sqrt{3}$ **C)** 4

D) 6 **E)** $2\sqrt{3}$

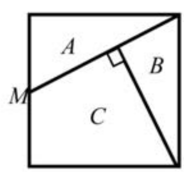
21 Luis tiene un reloj digital (que marca desde 00:00 a 23:59) que se le ha estropeado. En vez de marcar el 1 marca el 9. Por ejemplo, cuando son las 19:16 marca 99:96. ¿Qué fracción del día el reloj marca la hora incorrecta?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{5}{8}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** $\frac{9}{10}$

22 Para obtener series de números, Samu coge un número y una moneda. Si sale cara, duplica el número y le resta 1; si sale cruz, divide el número entre 2 y le resta 1. Si Samu ha empezado con el número 6 y luego ha tirado la moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número final sea entero?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{5}{8}$

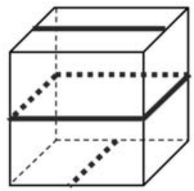
23 Hugo es un gran cocinero con mucha imaginación. Ha hecho un bizcocho cúbico de 2 dm de lado y ha cubierto sus cinco caras visibles con una capa de chocolate. Lo corta verticalmente en tres partes, como se muestra en esta vista superior, donde *M* es el punto medio del borde superior. La pieza que hemos llamado *B* tiene *y* dm^2 de chocolate. ¿Cuánto vale *y*?



A) 3 **B)** $\frac{24}{5}$ **C)** $\frac{32}{5}$ **D)** $8+\sqrt{5}$ **E)** $10+\sqrt{5}$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

24 En cada cara de un cubo dibujamos un segmento que une el punto medio de un lado con el punto medio del lado opuesto de forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro de esas líneas rodeen el cubo?



A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{3}{16}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{1}{2}$

25 Cuatro chicos y tres chicas van al cine y se sientan juntos en la misma fila. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo si ni dos chicas ni dos chicos pueden estar juntos, pero Pilar tiene que estar necesariamente al lado de Luis?

A) 144 **B)** 36 **C)** 24 **D)** 48 **E)** 72

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 13 de febrero de 2019

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

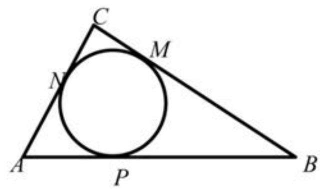
CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

1 En el triángulo ABC de la figura hemos dibujado su circunferencia inscrita e indicado los puntos de tangencia M, N y P. Si $AB = 10$, $BC = 9$ y $AC = 6$, ¿cuál es el valor de AP?



A) 3 **B)** 4 **C)** 2,5 **D)** 3,5 **E)** 4,5

2 Si el producto de tres enteros consecutivos es múltiplo de 7, ¿cuál de los siguientes números no es necesariamente un divisor de su producto?

A) 6 **B)** 14 **C)** 21 **D)** 28 **E)** 42

3 La ecuación $x^2 - n^2x + 2n = 0$ tiene dos soluciones diferentes. Si una de ellas es $x = 2$, calcula la otra.

A) –1 **B)** 3 **C)** –2 **D)** 1 **E)** Esta situación no puede darse

4 Esteban no quiere sentarse junto a Carlos ni junto a Belén. Javier no quiere sentarse junto a María. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse los cinco en fila cumpliendo estas condiciones?

A) 12 **B)** 16 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 40

5 La suma de las raíces con parte real positiva de la ecuación $z^{12} - 64 = 0$ es:

A) 2 **B)** 4 **C)** $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **D)** $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ **E)** $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$

6 Se introducen tres bolas en una urna, una tiene el número 1, otra el 2 y la tercera el 3. Se extrae una bola, se anota su número, y luego se devuelve a la urna. Se repite este procedimiento dos veces más. Si la suma de los tres números anotados es 6, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído la bola marcada con el número 2 en las tres ocasiones?

A) $\frac{1}{27}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{3}$

7 ¿Cuál de los siguientes números es el positivo más pequeño?

A) $10 - 3\sqrt{11}$ **B)** $3\sqrt{11} - 10$ **C)** $18 - 5\sqrt{13}$

D) $51 - 10\sqrt{26}$ **E)** $10\sqrt{26} - 51$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

8 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x \cos x + 2\cos^2 x = 0$ en el intervalo $[0, \pi)$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

9 En el triángulo rectángulo *PQR* de catetos *PR* = 6 cm y *RQ* = 8 cm tienes que marcar un punto *S* en la hipotenusa de tal manera que los triángulos *PRS* y *RQS* tengan igual perímetro. Y ahora viene la pregunta: ¿Qué área, en cm^2, tiene el triángulo *RQS*?

A) 9,6 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 9,2 **E)** 16

10 ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a $13^4 - 11^4$?

A) 8 **B)** 16 **C)** 32 **D)** 64 **E)** 128

11 Si en estas desigualdades de fracciones $0 < \frac{7}{X} < \frac{Y}{12} < \frac{13}{15}$, con X e Y enteros, buscas el menor valor posible de X y el mayor de Y, ¿cuánto vale $X + Y$?

A) 22 **B)** 21 **C)** 20 **D)** 19 **E)** 18

12 Sea N el número de 79 cifras que se obtiene al escribir los enteros desde 1 hasta 44, en orden uno tras otro. Al dividir N entre 45, el resto que obtenemos es:

A) 1 **B)** 44 **C)** 9 **D)** 18 **E)** 27

13 El 20% del 30% del 40% de 50 es lo mismo que el 60% de…

A) 2 **B)** 70 **C)** 12 **D)** 7 **E)** 15

14 ¿Cuántos valores reales de x, con $0 \le x \le 100$, satisfacen la ecuación $|\operatorname{sen} x| = 1$?

A) 15 **B)** 16 **C)** 25 **D)** 30 **E)** 32

15 La función f, definida sobre los naturales, verifica $f(1) = 1$, $f(2n) = 2 \cdot f(n)$ y $f(2n+1) = 4 \cdot f(n)$. El número de soluciones de la ecuación $f(n) = 16$ es…

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

16 Conociendo la fórmula de la suma de los cubos, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{(n\cdot(n+1))^2}{4}$,

te será muy sencillo calcular el valor de la suma $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + 19^3$.

A) 19 900 **B)** 20 400 **C)** 21 200 **D)** 23 600 **E)** 24 400

17 En el pentágono $ABCDE$, los ángulos A, C y E son rectos. Además, $AB = 15$, $BC = 12$, $CD = 5$ y $DE = 20$. El área del pentágono es:

A) 270 **B)** 236 **C)** 240 **D)** 244 **E)** 252

18 El área de la corona circular comprendida entre dos circunferencias concéntricas es $\dfrac{9\pi}{2}$. ¿Cuál es la longitud de una cuerda de la circunferencia mayor que sea tangente a la menor?

A) $2\sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** $3\sqrt{2}$ **D)** $3\sqrt{3}$ **E)** $4\sqrt{2}$

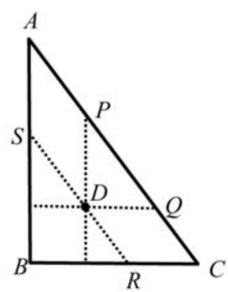
19 En cada vértice de un pentágono escribimos un número entero, de modo que la suma de los números de dos vértices contiguos no sea un múltiplo de tres, y tampoco lo sea la suma de los números de tres vértices consecutivos. De los cinco números escritos, ¿cuántos son, necesariamente, múltiplos de 3?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Ninguno

20 En un torneo de Grand Slam gana el partido el primer jugador que gana 3 sets. Si dos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar un set, ¿cuál es la probabilidad de que el partido acabe en el cuarto set?

A) $\dfrac{3}{8}$ **B)** $\dfrac{1}{2}$ **C)** $\dfrac{3}{5}$ **D)** $\dfrac{1}{4}$ **E)** $\dfrac{5}{16}$

21 En el interior del triángulo rectángulo ABC de catetos 3 y 4 se elige un punto D que dista 1 de cada uno de los catetos. Por D se trazan paralelas a los tres lados que cortan a los lados en los puntos señalados en la figura. Entonces la suma de los segmentos $PQ + RS$ es…

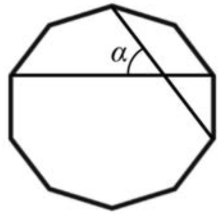


A) 5 **B)** 5,2 **C)** 5,4

D) $\sqrt{30}$ **E)** 6

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

22 En el decágono regular de la figura, ¿cuánto mide el ángulo α?



A) 45º **B)** 48º **C)** 54º
D) 60º **E)** 72º

23 En cierto triángulo, una bisectriz de longitud 7 es perpendicular a una mediana de longitud 8. ¿Cuál es el área del triángulo?

A) 35 **B)** 36 **C)** 42 **D)** 48 **E)** 28

24 El número complejo $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ es una de las soluciones de la ecuación $x^4 + x^2 + 1 = 0$. ¿Cuánto vale la suma

$z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$?

A) 0 **B)** 1 **C)** – 1 **D)** i **E)** – i

25 Al sumar los valores de los ángulos interiores de un polígono, Don Retorcido ha obtenido el valor 2019. Pero anda algo despistado, y ha sumado dos veces uno de los ángulos. ¿Cuál es la medida del ángulo duplicado?

A) 30º **B)** 39º **C)** 63º **D)** 115º **E)** 140º

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

concurso de primavera MATEMATICAS

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 27 de abril de 2019

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

Grupo ANAYA

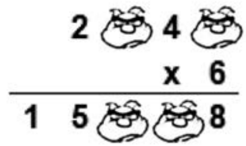
Grupo SM

McGraw-Hill Eduation

Smartick

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

1 ¡Aquí está Comenúmeros fiel a su cita con nosotros! ¿Cuál es la suma de los cuatro números que se ha comido de esta multiplicación? ¡Ah!, me olvidaba, a Comenúmeros le sientan fatal los ochos y nunca se los come.

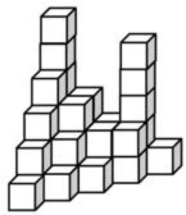


A) 27 **B)** 22 **C)** 30 **D)** 15 **E)** 23

2 Estas cinco piezas pueden colocarse para formar cuatro de las cinco figuras que ves abajo. ¿Cuál de ellas es la que no se puede formar?

A) Se pueden todas **B)** Solo se puede la 1ª **C)** No se pueden la 3ª y la 5ª
D) Se pueden todas menos la 5ª **E)** No se pueden la 2ª y la 5ª

3 Miguel ha formado esta construcción apilando cubos iguales uno encima de otro. ¿Cuántos cubos ha utilizado?



A) 35 **B)** 36 **C)** 37
D)38 **E)** 39

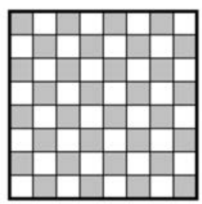
4 ¿Cuántos números de tres cifras tienen dos iguales y una distinta?

A) 201 **B)** 124 **C)** 273 **D)** 243 **E)** 219

5 En una bolsa hay 100 bolas numeradas del 1 al 100. Saco una al azar y miro el número. ¿Cuál de estos sucesos es más probable?

A) Que sea el 5 **B)** Que la suma de sus cifras sea 5 **C)** Que sea menor que 5
D) Que sea múltiplo de 5 **E)** Que alguna de sus cifras sea un 5

6 En un tablero de ajedrez, ¿cuál es el mayor número de reyes que podemos colocar sin que se amenacen, es decir, que estén situados en casillas que no se toquen ni siquiera por las esquinas?



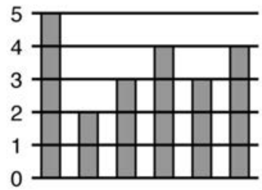
A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

7 Julián está haciendo un bizcocho que tiene que estar una hora y tres cuartos en el horno. Si lo mete en el horno a las 11:55, ¿a qué hora debe sacarlo?

A) A las 13:00 **B)** A las 13:40 **C)** A las 13:20
D) A las 13:10 **E)** A las 13:30

8 En este gráfico Julia anotó los puntos de sus últimos seis partidos de baloncesto. ¿Qué media alcanzó?



A) 4 **B)** 2,75 **C)** 3,5 **D)** 4,2 **E)** 3

9 Juan hace colgantes. Los que hace con dos cuentas blancas y una negra los vende a 5 euros. Los que hace con dos negras y una blanca, los vende a 6 euros. Si solo le quedan 6 cuentas negras y 8 blancas y quiere ganar la mayor cantidad de dinero posible, ¿cuántos euros, como máximo, puede obtener vendiendo sus colgantes?

A) 18 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 22 **E)** 23

10 La niña Centésima no para de calcular ni en la cama:
1 x **2** = 2; 2 x **3** = 6; 6 x **4** = 24; 24 x **5** = 120; 120 x **6** = 720;
720 x **7** = 5040; 5040 x **8** = 40 320 …

Por fin se quedó dormida cuando multiplicó por 38. ¿En cuántos ceros termina el resultado de esa multiplicación?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

11
– Don Retorcido, ¿cuántos años tiene doña Tortu?
– Cuando se conocieron, hace veinte años, doña Tortu tenía el triple de la edad de Comenúmeros y dentro de 30, cuando cumplan 50 años de amistad, solo tendrá el doble.

¡Dime tú, niña Centésima, cuántos años tiene hoy doña Tortu!

A) 170 **B)** 190 **C)** 180 **D)** 140 **E)** 160

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

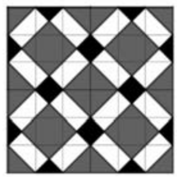
12 El Lobo Feroz va a 12 km/h mientras que Caperucita va a 4 km/h. Saliendo a la vez desde la entrada del bosque, el Lobo llegó media hora antes a la casa de la abuela y se zampó todo lo que se le puso por delante. ¿Cuántos kilómetros hay desde la entrada del bosque a la casa de la abuela?

A) 4 **B)** 8 **C)** 6 **D)** 10 **E)** 3

13 Si vas a hacer paella recuerda esta máxima de las abuelas: "dos puñados de arroz por persona y uno de regalo para la cazuela". He calculado que en medio puñado de arroz hay 7 montoncitos de unos 100 granos cada uno. Según mis cálculos y siguiendo la receta de la abuela, ¿qué número aproxima mejor los granos que tendrá una paella para 8 personas?

A) 15 000 **B)** 10 000 **C)** 30 000 **D)** 25 000 **E)** 20 000

14 Mariquilla ha diseñado este bonito azulejo en blanco, gris y negro. ¿Qué fracción del mosaico es gris?



A) $\frac{5}{12}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{3}{4}$

D) $\frac{9}{16}$ **E)** $\frac{4}{9}$

15 En las fiestas de San Isidro 4 viajes en tiovivo cuestan lo mismo que 15 barquillos, y 48 castañas asadas cuestan lo mismo que 10 barquillos. ¿Cuántas castañas asadas puedes comprar por el precio de un viaje en tiovivo?

A) 32 **B)** 15 **C)** 21 **D)** 16 **E)** 18

16 Voy a cambiar 164 euros por monedas de 20 céntimos y de 2 céntimos. Si me dan 725 monedas de 20 céntimos, ¿cuántas me deben dar de 2 céntimos?

A) 1025 **B)** 855 **C)** 1900 **D)** 1258 **E)** 950

17 Este conocido logo está hecho con tres paralelogramos iguales. Si el perímetro del hexágono exterior es 75 cm y el del triángulo interior es 21 cm, ¿cuántos centímetros mide el lado largo del paralelogramo?

A) 16 **B)** 14 **C)** 20 **D)** 9

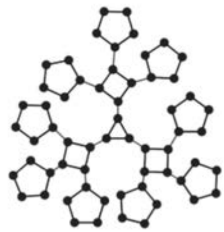
E) 12,5

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

18 La cuarta parte de la tercera parte del doble de la quinta parte del producto de 120 por 6 es…

A) 384 **B)** 24 **C)** 216 **D)** 12 **E)** 72

19 Este año en Torrejón van a utilizar motivos geométricos para iluminar las calles en Navidad. El diseñador ha comenzado formando un triángulo con tres luces led en los vértices. De cada vértice del triángulo sale un cuadrado con luces en los vértices y de cada vértice libre de los cuadrados un pentágono. El diseñador quiere ahora continuar poniendo hexágonos en los vértices libres de los pentágonos. ¿Cuántas luces necesita en total para culminar su obra?

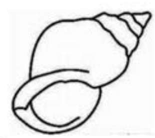


A) 114 **B)** 325 **C)** 276 **D)** 360 **E)** 257

20 Mi teléfono está loco. Cuando pulso una tecla con un número par marca uno más. Así, si pulso el 4 marca el 5. Cuando pulso un número impar, lo multiplica por 4 y marca la cifra de las unidades del resultado. Por ejemplo, si pulso el 3 marca el 2. ¿Qué números debo pulsar si quiero que marque el 016?

A) 127 **B)** 045 **C)** 509 **D)** 547 **E)** 925

21 Tengo 45 caracolas, 27 piedras preciosas y 36 monedas de oro y quiero repartir todo en cofres con el mismo contenido. Si hago la mayor cantidad de cofres posibles, ¿cuántos objetos habrá en cada uno?

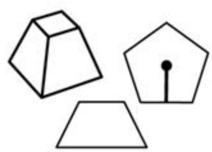


A) 10 **B)** 15 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 3

22 ¿Sabes por qué a Comenúmeros le sientan mal los ochos? Un día se comió todas las cifras 8 que hay del 1 al 288 como si fueran rosquillas. ¿Cuántos ochos se comió el goloso?

A) 58 **B)** 57 **C)** 48 **D)** 60 **E)** 55

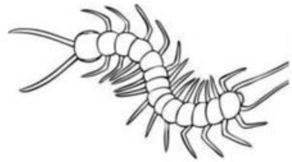
23 La mitad de los niños de mi clase sabe qué es una pirámide truncada, tres cuartas partes saben qué es un trapecio isósceles y uno de cada tres sabe qué es la apotema de un polígono regular. Si en clase somos 24 y todos sabemos alguna de estas tres cosas, ¿cuántos como máximo saben las tres?



A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

24 En el terrario de bichos peligrosos hay escolopendras, arañas y avispas. En total hay 18 bichos que tienen entre todos 196 patas. Si hay el doble de arañas que de escolopendras, ¿cuántas avispas hay? Por si no eres muy de bichos, te diré que una escolopendra tiene 46 patas, las arañas tienen 8 y las avispas 6.



A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

25 Y para terminar Don Retorcido pregunta: ¿cuál de estos cinco números es múltiplo de 6, pero no lo es de 9, es divisible entre 7 pero no lo es entre 4?

A) 696 **B)** 666 **C)** 996 **D)** 966 **E)** 999

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 27 de abril de 2019

NIVEL II (1° y 2° de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

IMPORTANTE: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 2.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

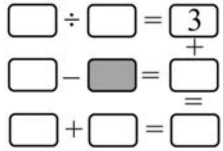
Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

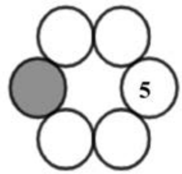
XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

1 Hemos colocado los números del 1 al 9 en los recuadros para que se cumplan las cuatro igualdades que hay. ¿Qué número ocupa la casilla central sombreada?



A) 4 **B)** 5 **C)** 1 **D)** 7 **E)** 8

2 Colocamos los números 5, 6, 7, 8, 9 y 10 en los círculos de forma que la suma de los números de dos círculos que se tocan sea siempre primo. Si colocamos el 5 a la derecha, ¿qué número irá en el círculo gris?



A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

3 ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen exactamente tres cincos?

A) 40 **B)** 36 **C)** 35 **D)** 34 **E)** 32

4 Don Retorcido y la niña Centésima se han encontrado estos números {2, 3, 4, 15, 28, 35, 50} y los han ido cogiendo alternativamente de uno en uno hasta que ya no han quedado más números. La sorpresa ha sido que al multiplicar los números que han elegido cada uno les ha dado el mismo resultado. Si la niña Centésima fue la primera que eligió número, ¿cuánto suman sus números?

A) 72 **B)** 56 **C)** 65 **D)** 81 **E)** 55

5 Tres amigos van a comprar sus entradas de igual precio para el musical *Don Retorcido y sus problemas*. A Antía, por ser la primera de la cola le rebajan un 15 %, a Roger, el segundo, un 10 % y al tercero, Fernando, un 5 %. Si entre los tres han pagado 351 euros, ¿cuál era el precio original de cada entrada?

A) 130 € **B)** 100 € **C)** 120 € **D)** 167 € **E)** 117 €

6 Si los números a, b, c son enteros positivos y $\frac{33}{29} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$, ¿cuánto vale la suma $a + b + c$?

A) 12 **B)** 4 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 9

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

7 ¿Cuál de los siguientes números es mayor?

A) $2^{3^{\left(2^3\right)}}$ **B)** $\left(2^3\right)^{\left(2^3\right)}$ **C)** $\left(2^{\left(3^2\right)}\right)^3$ **D)** $2^{\left(3^2\right)^3}$ **E)** Los cuatro son iguales

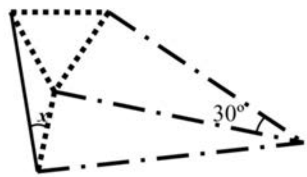
8 ¡Prepárate para un buen lío! Berta tiene cinco hijas y ningún hijo. Algunas de sus hijas tienen cinco hijas y otras no tienen ninguna. Entre hijas y nietas, Berta tiene un total de veinte y no tiene bisnietas. ¿Cuántas hijas y nietas de Berta no tienen hijas?

A) 16 **B)** 17 **C)** 18 **D)** 19 **E)** 20

9 En un torneo de fútbol participaron seis equipos, jugando todos contra todos un solo partido. Si la puntuación era de 3 puntos por victoria, 1 por empate y 0 por derrota, y entre todos los equipos sumaron 40 puntos, ¿cuántos empates hubo?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

10 En la figura, los cuatro segmentos dibujados con PUNTOS miden lo mismo y los tres segmentos PUNTO-RAYA también miden lo mismo entre sí. ¿Cuánto mide el ángulo x?

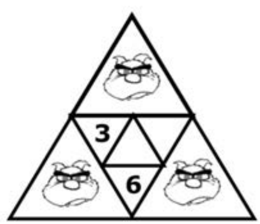


A) 18º **B)** 26º **C)** 15º
D) 24º **E)** 20º

11 El alfabeto del lenguaje SISE tiene una sola consonante (la S) y dos vocales (la E y la I). Cualquier sucesión de una o más letras es una palabra, excepto las que tienen dos o más vocales consecutivas. Por ejemplo S, SSSES, ESI y SISESI son palabras, pero SEIS no lo es. ¿Cuántas palabras de cuatro letras tiene este lenguaje?

A) 17 **B)** 16 **C)** 21 **D)** 22 **E)** 20

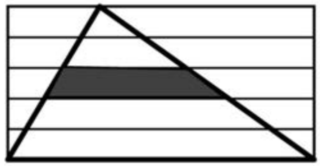
12 En la figura ves siete regiones triangulares que tenían números enteros según esta regla: cada número de cada región es la suma de los números de sus regiones vecinas. Ten en cuenta que llamamos regiones vecinas a las que comparten más de un punto. Después de todas las explicaciones, llega la pregunta: ¿cuánto suman los números de las tres regiones de Comenúmeros?



A) 15 **B)** 0 **C)** –9 **D)** 12 **E)** 6

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

13 El rectángulo que ves está dividido en cinco partes iguales mediante segmentos paralelos a la base. ¿Qué fracción del triángulo ocupa el trapecio sombreado?



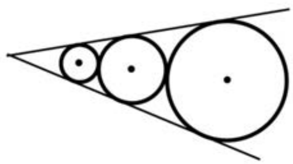
A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{3}{10}$

D) $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{8}$

14 Si x son los números que cumplen $-5 \le 2x - 1 \le 7$, ¿cuál es la diferencia entre el mayor valor posible de x y el menor?

A) 7 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 12 **E)** 6

15 En el dibujo ves, desde arriba, a tres amigos con gorros mexicanos atascados en una esquina. Si el radio del sombrero pequeño es de 1 dm y el del mediano es de 4 dm, ¿qué radio tiene el sombrero mexicano mayor?



A) 10 **B)** 6 **C)** 15

D) 20 **E)** 16

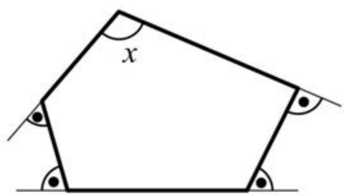
16 Si parto un rectángulo mediante un segmento paralelo a los lados menores obtengo dos rectángulos cuyos perímetros suman 84 cm. Pero si lo divido mediante un segmento paralelo a los lados mayores, los perímetros de los rectángulos obtenidos suman 96 cm. ¿Cuál es el perímetro, en cm, del rectángulo de partida?

A) 60 **B)** 72 **C)** 90 **D)** 82 **E)** 57,5

17 Si eliges tres vértices de un heptágono regular puedes formar muchos triángulos, pero, ¿cuántos de esos triángulos son isósceles?

A) 28 **B)** 12 **C)** 35 **D)** 21 **E)** 14

18 Si la suma de los cuatro ángulos marcados con un punto es de 336º, ¿cuánto mide el ángulo x?



A) 96º **B)** 201º **C)** 156º

D) 191º **E)** 168º

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

19 Esta tabla nos muestra el resto de dividir cada número de la primera columna (desde el 11 hasta el 60) entre cada número de la primera fila (desde el 1 hasta el 6). ¿Cuánto suman todos los números del rectángulo sombreado?

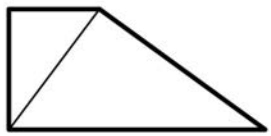
	1	2	3	4	5	6
11	**0**	**1**	**2**	**3**	**1**	**5**
12	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**
13	**0**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**
14	**0**	**0**	**2**	**2**	**4**	**2**
15	**0**	**1**	**0**	**3**	**0**	**3**
…	…	…	…	…	…	…
60	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

A) 400 **B)** 375 **C)** 360
D) 520 **E)** 380

20 En el último partido de baloncesto, Irene lanzó solo dobles (que valen dos puntos) y triples (que valen tres). Solo tuvo éxito en el 20% de los triples y en el 30% de los dobles. Si en total tiró 30 veces, ¿cuántos puntos marcó?

A) 12 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 30 **E)** 36

21 El trapecio rectángulo de la figura está formado por dos triángulos rectángulos semejantes. Los catetos del pequeño miden 3 cm y 4 cm. ¿Cuál es, en cm, el perímetro del trapecio?



A) 22 **B)** 21 **C)** 20
D) 23 **E)** 24

22 La señora Rosalía tiene una colección de 480 rosas. Acaba de comprar 60 rosas blancas y su sobrina Rosalinda le dice "¿Te has fijado?, con estas 60 rosas nuevas el porcentaje de rosas blancas se ha duplicado." ¿Cuántas rosas blancas tiene…? No, cambiamos la pregunta que si no es muy fácil, ¿cuánto suman las cifras del número que indica la cantidad de rosas blancas que tiene ahora Rosalía?

A) 12 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 13 **E)** 14

23 El menor número múltiplo de 19 que acaba en 17 comienza por…

A) 4 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 1

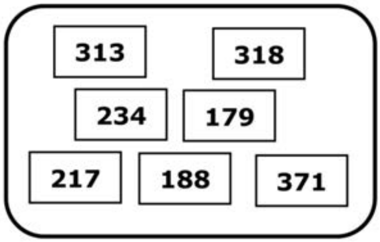
24 Al sumar el mismo número al numerador y denominador de la fracción $\frac{3}{7}$ obtenemos la fracción $\frac{3}{5}$. ¿Qué número hemos sumado?

A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 10 **E)** 15

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

25 Don Retorcido tiene una caja con sus siete números favoritos y les dice a sus amigos que se los repartan. Joaquín, sin mirar, coge tres, María coge dos, Merche uno y el que sobra se lo queda don Retorcido. Cuando Joaquín mira sus números le dice a María "estoy seguro de que la suma de tus dos números es par". ¿Cuánto suman los tres números de Joaquín?

A) 822 **B)** 685 **C)** 740 **D)** 776 **E)** 764



XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 27 de abril de 2019

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

IMPORTANTE: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 3.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

1 Si $a = 1 + b$, ¿cuánto vale $\dfrac{1+2b}{a+b}$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** $\dfrac{2}{3}$ **E)** $\dfrac{1}{2}$

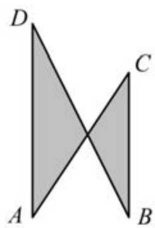
2 Tres amigas comparan la capacidad de sus piscinas. La de Sara tiene un 15% más que la de Cati y la de Julia tiene un 25% más que la de Cati. ¿Cuál de estas afirmaciones es correcta?

A) La de Julia tiene un 60% más que la de Sara
B) La de Sara tiene un 60% menos que la de Julia
C) La de Sara tiene un 8% menos que la de Julia
D) La de Julia tiene un 10% más que la de Sara
E) La de Sara tiene un 12% menos que la de Julia

3 Sean $-4 \le a \le -2$, $2 \le b \le 4$, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar la expresión $\dfrac{a+b}{a}$?

A) -1 **B)** $-\dfrac{1}{2}$ **C)** 0 **D)** $\dfrac{1}{2}$ **E)** 1

4 Para mi disfraz de este año, he querido diseñar una pajarita asimétrica. Teniendo en cuenta que los ángulos DAB y ABC son rectos, y que $AB = 4$, $AD = 8$, $BC = 6$, ¿cuál es la diferencia entre las áreas de las dos partes de la pajarita?



A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

5 Tres amigos, África, Blanca y Carlos hacen el mismo recorrido en bicicleta. África va todo el rato a 20 km/h, Blanca recorre la primera mitad a 10 km/h y la segunda mitad a 30 km/h. Carlos hace tres cuartos del recorrido a 30 km/h, pero le da un tirón y el cuarto que le queda lo hace a 5 km/h. ¿Cuál de ellos tarda menos tiempo en hacer el recorrido?

A) África **B)** Blanca **C)** Carlos
D) Los tres tardan lo mismo **E)** Falta saber la distancia recorrida

6 Si $(x+2)\cdot(y+2) = 60$ y $(x+3)\cdot(y+3) = 40$, ¿cuál es el valor de $(x+5)\cdot(y+5)$?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

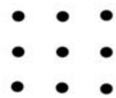
7 En la papelería se venden ocho gomas de borrar por un euro, un rotulador cuesta un euro y una agenda 10 euros. He comprado en total 100 artículos entre gomas, rotuladores y agendas y he pagado 100 euros. ¿Cuántos rotuladores he comprado?

A) 14 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 24

8 En el cajón de mi abuela he encontrado una receta para hacer un bizcocho para 8 personas. Los ingredientes necesarios son: 1 yogur, 3 huevos, 3 tazas de harina, 2 tazas de azúcar, 1/2 taza de aceite y 2 cucharaditas de levadura. Si en casa tengo 4 yogures, 5 huevos, 6 tazas de harina, 3 tazas de azúcar, 3/4 tazas de aceite y 5 cucharaditas de levadura. ¿Cuál es el máximo número de amigos que podemos merendar bizcocho comiendo todos una ración?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

9 Elegimos tres puntos al azar de esta cuadrícula. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres puntos elegidos estén alineados?

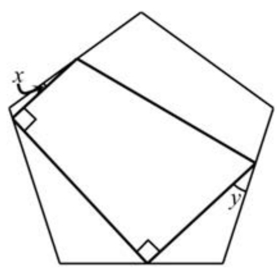


A) $\frac{1}{21}$ **B)** $\frac{2}{21}$ **C)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{2}{7}$ **E)** $\frac{1}{14}$

10 Un trapecio rectángulo tiene sus vértices en cuatro lados de un pentágono regular como ves en la figura, en la que hemos marcado los ángulos x e y.
¿Cuánto vale $x + y$?

A) 30º **B)** 54º **C)** 36º

D) 45º **E)** 27º

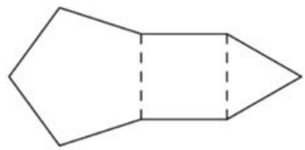


11 ¿Cuál es el producto de todas las soluciones reales de la ecuación $(x^2-2)^{(3x^2+7x-6)}-1=0$?

A) -3 **B)** 2 **C)** -2 **D)** -6 **E)** $-\frac{27}{2}$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

12 Vamos a realizar una construcción con polígonos regulares. Empezamos colocando un cuadrado sobre un lado de un triángulo, luego colocamos un pentágono sobre un lado del cuadrado sin que las figuras se superpongan, así sucesivamente hasta colocar un decágono. ¿Cuántos lados tendrá el polígono resultante?



A) 39 **B)** 38 **C)** 41 **D)** 42 **E)** 43

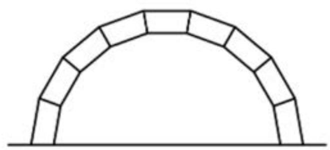
13 En una liga de fútbol participan 20 equipos. Todos juegan contra todos dos veces (una en casa y otra fuera). Si la suma de las puntuaciones de todos los equipos fue de 1005, ¿cuántos empates hubo? Recuerda: Una victoria son 3 puntos y un empate es 1 punto.

A) 113 **B)** 121 **C)** 135 **D)** 141 **E)** 150

14 Ana dice: "Lo hizo Berto". Berto dice: "Ana miente". Cris dice: "Lo hizo Dani". Dani dice: "Lo hizo Ana". Eva dice: "Cris miente". Sabemos que exactamente dos de las afirmaciones son falsas y que solo una de esas cinco personas lo hizo. ¿Quién lo hizo?

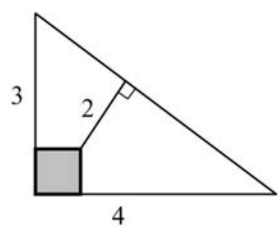
A) Ana **B)** Berto **C)** Cris **D)** Dani **E)** Eva

15 A Lucía le gustan mucho las manualidades y se propone construir un arco con trapecios isósceles iguales como muestra la figura. Si quiere construir el arco con nueve de estos trapecios, ¿cuántos grados ha de medir el ángulo interior más grande del trapecio?



A) 100º **B)** 102º **C)** 104º **D)** 108º **E)** 110º

16 En la esquina de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 hemos colocado un pequeño cuadrado coloreado de gris. Con los datos que aporta el dibujo, ¿qué área ocupa el cuadradito gris?



A) $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{9}{16}$ **C)** $\frac{1}{9}$

D) 1 **E)** $\frac{4}{49}$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

17 Julián lanza al aire una moneda dos veces y Lucía la lanza tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengan el mismo número de caras?

A) $\frac{7}{32}$ **B)** $\frac{5}{16}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{3}{16}$ **E)** $\frac{5}{32}$

18 En una convención de mellizos y trillizos hay 9 parejas de mellizos y 6 tríos de trillizos. Cada mellizo le da la mano a todos los mellizos menos a su mellizo y a la mitad de los trillizos. Cada trillizo le da la mano a todos los trillizos menos a sus trillizos y a la mitad de los mellizos. ¿Cuántos apretones de manos se dieron en total?

A) 324 **B)** 441 **C)** 630 **D)** 648 **E)** 882

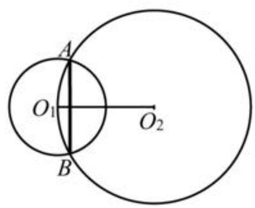
19 Si a y b son números enteros positivos, ¿cuál es la suma de todos los valores posibles de a que son solución de la ecuación $5a - 9b^2 = ab$?

A) 12 **B)** 16 **C)** 20 **D)** 144 **E)** 156

20 Tenemos dos circunferencias de radios 2 y 1, de modo que la circunferencia de radio 2 pasa por el centro de la circunferencia de radio 1. ¿Cuál es la distancia entre los dos puntos en los cuales se cortan las dos circunferencias?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** $\frac{\sqrt{15}}{2}$

D) $2\sqrt{3}$ **E)** 2



21 ¿Cuánto vale la suma de todos los enteros n para los que $n^2 + 6n + 24$ es un cuadrado perfecto?

A) –12 **B)** –6 **C)** 6 **D)** – 8 **E)** 8

22 ¿Cuál es el menor número factorial que es divisible por 2^{100}?

Recuerda: el factorial de n es $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$.

A) 99! **B)** 100! **C)** 101! **D)** 102! **E)** 104!

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

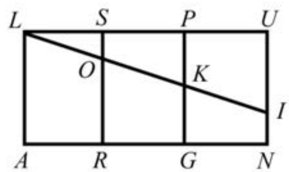
23 El frutero de mi barrio apila las naranjas de la siguiente forma: Sobre una base rectangular de 5 x 8 naranjas va colocando naranjas de manera que las naranjas del piso superior se apoyan en el hueco que queda entre las cuatro naranjas de abajo hasta coronar con un piso que tiene una única fila de naranjas. ¿Cuántas naranjas tienen las pirámides del frutero?

A) 100 **B)**134 **C)** 98 **D)**101 **E)** 96

24 Un número de seis cifras contiene los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea múltiplo de 5?

A) $\frac{9}{50}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{12}{25}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{9}{25}$

25 Dividimos el rectángulo *LUNA* en tres rectángulos idénticos. Sabiendo que el área de *PUIK* es el doble del área de *KING*, ¿cuál es el cociente entre el área de *SOL* y el área de *LUNA*?



A) $\frac{2}{45}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{27}$ **D)** $\frac{1}{30}$ **E)** $\frac{4}{81}$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 27 de abril de 2019

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

IMPORTANTE: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 4.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

1 Si $3^a = 81^{b+2}$ y $125^b = 5^{a-3}$, ¿cuánto vale $a \cdot b$?

A) 60 **B)** 15 **C)** -30 **D)** 24 **E)** 48

2 El área que encierra la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 1)$, $B(1, 7)$ y $C(9, 1)$ mide:

A) 10π **B)** 25π **C)** 16π **D)** 27π **E)** 9π

3 En una circunferencia repartimos n puntos de forma que siempre haya la misma distancia entre dos consecutivos. Dibujamos un polígono regular con vértices en algunos de estos puntos y comprobamos que tenemos tres vértices consecutivos en las posiciones 26, 2 y 8. La suma de n y el número de lados de nuestro polígono dibujado es:

A) 32 **B)** 34 **C)** 35 **D)** 36 **E)** 38

4 Agustina, Bea y César eligen cada uno un número entero, a, b y c. Agustina calcula $a + \frac{b}{c}$ y obtiene 197. Bea calcula $\frac{a}{c} + b$ y obtiene 92. César calcula $\frac{a+b}{c}$ y obtiene x.
¿Cuánto vale x?

A) 16 **B)** 17 **C)** 256 **D)** 270 **E)** 289

5 Si $f(x)$ es una función polinómica que cumple que $f(x^2+1) = x^4 + 5x^2 + 3$ para todo número real x, entonces, para todo número real x, se cumple que $f(x^2-1)$ es igual a:

A) $x^4 + 5x^2 + 1$ **B)** $x^4 + x^2 - 3$ **C)** $x^4 - 5x^2 + 1$
D) $x^4 + x^2 + 3$ **E)** $x^4 + 3x^2$

6 ¿Cuál es el valor más pequeño de x ($x > 1$) si tiene que cumplir que $\frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} \leq \frac{1}{x^2}$?

A) $e^{\sqrt{e}}$ **B)** $e^{(e^2)}$ **C)** e^{2e} **D)** $(1+e)^e$ **E)** e^{-2e}

7 Sean a y b dos números enteros que cumplen $a + \sqrt{b} = \sqrt{14 + \sqrt{180}}$.
Calcula $a^2 + b^2$.

A) 40 **B)** 17 **C)** 29 **D)** 37 **E)** 34

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

8 En la sucesión a_1, a_2, a_3 ... se cumple que $a_1 = a$, $a_3 = b$ y que cada término después del primero es la suma del anterior y del posterior menos uno, es decir, $a_{n+1} = a_n + a_{n+2} - 1$ si $n > 1$. Calcula la suma de los 2019 primeros términos.

A) $2a+2b+2015$ **B)** $2a+2b+2016$ **C)** $2a+b+2015$

D) $a+2b+2016$ **E)** $2a+b+2016$

9 Con 300 cubos de 1 centímetro de lado construimos un prisma rectangular sólido y lo apoyamos sobre una mesa. Si sabemos que el perímetro de la base es de 14 centímetros, ¿cuál es la suma de todas las diferentes alturas posibles del prisma?

A) 80 **B)** 55 **C)** 210 **D)** 105 **E)** 75

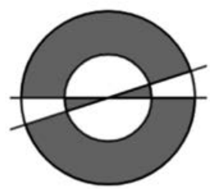
10 ¿Cuál es el resto de dividir la suma $3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{2019}$ entre 8?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 6

11 Tres amigos juegan con sus piedras. Jorge empieza con 15, Miguel con 14 y Santiago con 13. El juego consiste en que el que tiene más piedras da una piedra a cada uno de los otros amigos y deja otra piedra en un bote. El juego termina cuando uno de los tres se queda sin piedras. En ese momento, ¿cuántas piedras hay en el bote?

A) 36 **B)** 37 **C)** 38 **D)** 39 **E)** 40

12 Dos rectas pasan por el centro de dos círculos concéntricos de radios 1 y 2. Si el cociente entre el área sombreada y el área no sombreada es 7/3, ¿cuánto mide el ángulo agudo que forman las rectas?



A) 7º **B)** 14º **C)** 15º

D) 18º **E)** 21º

13 ¿Cuántos números naturales n menores que 100 hacen que $\sqrt{1+2+3+...+n}$ sea un número natural?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

14 Los cuatro vértices de un cuadrado son los puntos $A(p, q)$, $B(r, s)$, $C(t, 0)$, $D(0, u)$, siendo p, q, r, s, t, u todos positivos. Sabiendo que $p + q + r + s = 36$, ¿cuál es el valor de la suma $t + u$?

A) 9 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 6 **E)** 24

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

15 ¿Cuál es el menor número factorial que es divisible por 2^{1000}?
[$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$]

A) 1000! **B)** 1001! **C)** 1004! **D)** 1008! **E)** 1010!

16 Si a y b son números positivos distintos de 1, ¿cuánto es

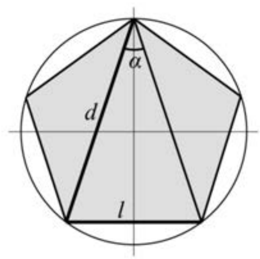
$$\frac{\log_a\left(\sqrt[3]{b^5}\right)^2 - 4\log_a\left(\frac{1}{b}\right)}{\log_a\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{b}}}\right)}\ ?$$

A) 173 **B)** 174 **C)** 175 **D)** 176 **E)** 177

17 La relación entre la diagonal del pentágono regular de la figura y su lado es $\frac{d}{l} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por eso sabemos que el $\cos\alpha$ es igual a:

A) $\phi - 1$ **B)** $\frac{1}{\phi}$ **C)** $\frac{\phi}{2}$

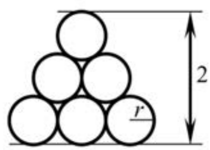
D) $\frac{\phi}{4}$ **E)** $\frac{\sqrt{5}}{4}$



18 Tres rectas paralelas cortan al eje de ordenadas en los puntos $A(0, -1)$, $B(0, 2)$, $C(0, 4)$ y al eje de abscisas en los puntos $D(d, 0)$, $E(e, 0)$, $F(f, 0)$.
Si sabemos que $d + e + f = 40$, ¿cuál es la pendiente de las rectas?

A) -8 **B)** $-\frac{1}{8}$ **C)** -4 **D)** $-\frac{1}{4}$ **E)** -1

19 Don Retorcido ha situado seis circunferencias iguales tangentes de manera triangular, tal y como se indica en la figura. Una vez hecho esto, la altura de la figura resultante mide 2. ¿Cuánto mide el radio de las circunferencias?



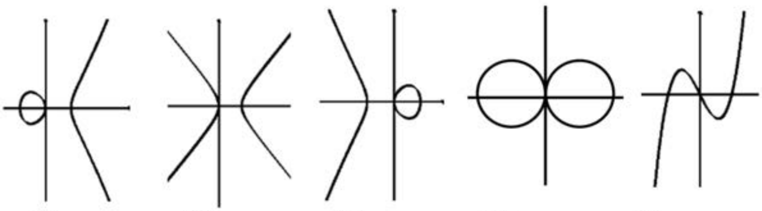
A) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ **C)** $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

20 Marta está en un punto intermedio entre su casa y el gimnasio. Puede ir andando al gimnasio o volver a casa y coger su bici para ir al gimnasio. Sabiendo que en bici va 7 veces más rápido que andando y que haga lo que haga tardará lo mismo, ¿cuál es el cociente entre la distancia a la que está de casa y la distancia a la que está del gimnasio?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{4}{5}$ **E)** $\frac{5}{6}$

21 ¿Qué dibujo representa mejor la gráfica de la ecuación $y^2 = x(x^2 - 1)$?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

22 ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen exactamente tres cifras iguales?

A) 400 **B)** 360 **C)** 351 **D)** 324 **E)** 320

23 Si z es un número complejo y $z^2 = 2z - 2$, entonces z^4 es…

A) -4 **B)** 4 **C)** 8 **D)** -8 **E)** 16

24 En la urna A tenemos una bola blanca y otra negra, en la urna B tenemos una bola blanca y dos negras y en la urna C tenemos una bola blanca y tres negras. Extraemos al azar una bola de la urna A y la introducimos en la B; a continuación, extraemos al azar una bola de la urna B y la introducimos en la urna C. Y por último, extraemos al azar una bola de la urna C. ¿Qué probabilidad hay de que esta última bola sea negra?

A) $\frac{13}{20}$ **B)** $\frac{27}{40}$ **C)** $\frac{7}{10}$ **D)** $\frac{29}{40}$ **E)** $\frac{3}{4}$

25 Sean a, b, c, f, g y h los números complejos cuyos afijos son los vértices de un triángulo ABC, su circuncentro F, su baricentro G y su ortocentro H, respectivamente. Entonces:

A) $a + b + c = 3h$ **B)** $2(a + b + c) = 3(f + h)$ **C)** $a + b + c = 2f + h$

D) $2(a + b + c) = 3$ **E)** $f + h = 2g$

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**C**	1	**E**	1	**B**	1	**D**
2	**B**	2	**A**	2	**D**	2	**D**
3	**A**	3	**B**	3	**B**	3	**A**
4	**A**	4	**E**	4	**D**	4	**C**
5	**A**	5	**E**	5	**C**	5	**E**
6	**C**	6	**A**	6	**D**	6	**C**
7	**A**	7	**B**	7	**E**	7	**D**
8	**E**	8	**D**	8	**B**	8	**C**
9	**D**	9	**A**	9	**C**	9	**A**
10	**B**	10	**C**	10	**E**	10	**C**
11	**D**	11	**D**	11	**C**	11	**D**
12	**D**	12	**E**	12	**C**	12	**C**
13	**D**	13	**D**	13	**B**	13	**A**
14	**E**	14	**D**	14	**C**	14	**E**
15	**A**	15	**A**	15	**C**	15	**D**
16	**D**	16	**D**	16	**B**	16	**A**
17	**D**	17	**B**	17	**A**	17	**C**
18	**D**	18	**C**	18	**A**	18	**C**
19	**C**	19	**A**	19	**C**	19	**B**
20	**E**	20	**B**	20	**B**	20	**A**
21	**A**	21	**B**	21	**B**	21	**A**
22	**D**	22	**E**	22	**E**	22	**C**
23	**D**	23	**A**	23	**B**	23	**C**
24	**D**	24	**B**	24	**B**	24	**B**
25	**E**	25	**B**	25	**E**	25	**B**

XXIII Concurso 2ª Fase

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**A**	1	**A**	1	**A**
2	**C**	2	**E**	2	**C**	2	**B**
3	**D**	3	**C**	3	**D**	3	**C**
4	**D**	4	**B**	4	**B**	4	**B**
5	**D**	5	**A**	5	**A**	5	**B**
6	**C**	6	**A**	6	**A**	6	**B**
7	**B**	7	**A**	7	**D**	7	**E**
8	**C**	8	**B**	8	**C**	8	**A**
9	**D**	9	**D**	9	**B**	9	**D**
10	**C**	10	**C**	10	**C**	10	**A**
11	**A**	11	**C**	11	**D**	11	**B**
12	**E**	12	**B**	12	**B**	12	**D**
13	**D**	13	**D**	13	**C**	13	**C**
14	**E**	14	**E**	14	**A**	14	**B**
15	**E**	15	**E**	15	**A**	15	**D**
16	**E**	16	**A**	16	**E**	16	**D**
17	**A**	17	**D**	17	**B**	17	**C**
18	**B**	18	**C**	18	**B**	18	**B**
19	**C**	19	**B**	19	**E**	19	**A**
20	**C**	20	**B**	20	**C**	20	**C**
21	**D**	21	**A**	21	**A**	21	**A**
22	**A**	22	**C**	22	**E**	22	**D**
23	**D**	23	**D**	23	**A**	23	**A**
24	**D**	24	**B**	24	**E**	24	**D**
25	**D**	25	**C**	25	**A**	25	**C**

XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (C) Si un cuarto de mandarina tiene 2,5 gajos, una mandarina tendrá $2{,}5 \times 4 = 10$ gajos. De modo que 65 gajos serán $65 : 10 = 6{,}5$ mandarinas.

2. (B) Construiremos los pisos empezando por el de arriba. Es evidente que cuando terminemos nos sobrarán muchos cubos blancos, así que solo es necesario considerar los cubos negros. En el primer piso hay 0 cubos negros, en el segundo 1, en el tercero 2, en el cuarto 3 y así sucesivamente. Tenemos pues que sumar la sucesión de números naturales, de modo que la suma sea 50 o lo más próximo posible a 50 sin sobrepasarlo.
Tanteando un poco vemos que: $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9 = 45$.
Por tanto, al completar 10 pisos solo quedan 5 cubos negros y no se puede terminar el piso decimoprimero. La construcción más alta es de 10 pisos.

3. (A) El de Julián alcanza 2,50 m = 25 dm y el de Lucía 370 cm = 37 dm.
En consecuencia, la diferencia de distancias es $37 - 25 = 12$ dm.

4. (A) Cada habitante de Trescatorce tiene $3 \times 3 = 9$ dedos en las manos y $14 \times 14 = 196$ dedos en los pies, luego un habitante de Trescatorce tiene $9 + 196 = 205$ dedos. Tres habitantes de Trescatorce tendrán pues $3 \times 205 = 615$ dedos. Por su parte, los 6 terrícolas tenemos $6 \times 20 = 120$ dedos.
Luego, en la fiesta hay $615 + 120 = 735$ dedos.

5. (A) En el concierto hay $19\,987 \times 205 = 4\,097\,335$ dedos. Claramente, el número que mejor los aproxima es 4 000 000.

6. (C) Puesto que las cantidades deben ser proporcionales empleamos la regla de tres. Si a 39 dientes de ajo le corresponden 51 patas de araña a 26 dientes de ajo le corresponderán x patas de araña de donde $x = \dfrac{26 \times 51}{39} = 34$.

7. (A) Dado que $100 = 24 \times 4 + 4$, tenemos que 100 h son igual a 4 días más cuatro horas. Luego el reloj tiene que darnos las $11 + 4 = 15$ h, esto es, las 3 de la tarde.

8. (E) El octógono interior se compone de 8 triángulos y 8 rombos. El área que falta para completar el octógono exterior se compone también de 8 triángulos y 8 rombos. Por tanto, el área del octógono interior es de $48 : 2 = 24$ cm^2.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

9. (D) El mínimo común múltiplo de 6, 10 y 15 es 30. Por lo tanto dentro de 30 días volveré a comer mi menú favorito.

10.(B)

$$\begin{array}{rrr} & \heartsuit & \clubsuit \\ & \times & 7 \\ \hline 4 & \clubsuit & \clubsuit \end{array}$$

Como la cifra de las unidades del producto $\clubsuit \times 7$ es $\clubsuit$, Necesariamente $\clubsuit$ es 0 o 5.

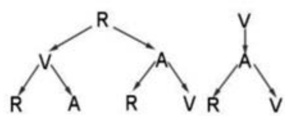
Descartamos cero pues implica que $\heartsuit$ sea igual a cero. Tenemos pues:

$$\begin{array}{rrr} & \heartsuit & 5 \\ & \times & 7 \\ \hline 4 & 5 & 5 \end{array}$$

De donde $\heartsuit = 6$ ´ya que $7 \times 6 + 3 = 45$. Por tanto, $\clubsuit + \heartsuit = 5 + 6 = 11$.

11.(D) Se puede ver que A), B), C) y E) caben en alguno de los huecos recortados. Por lo tanto, admitiendo que uno de los trozos no cabe en ningún hueco, D) es la solución. No obstante, podemos comprobar que no se puede encajar D) en ninguno de los huecos.

12.(D) Una forma segura de contar todas las formas de colorear, es hacerlo, por ejemplo, de arriba abajo y representar las posibilidades en forma de árbol. Sí comenzamos por los dos colores posibles en el vértice superior y continuamos de esa manera hasta llegar a la base del triángulo, tendremos representadas todas las posibilidades de colorear. En la figura quedan claras las 6 posibles formas.



13.(D) El barco recorre los 4,5 km en media hora más 15 minutos, es decir en tres cuartos de hora. En un cuarto de hora recorre $4{,}5 : 3 = 1{,}5$ km y en una hora, que son cuatro cuartos, recorrerá $1{,}5 \times 4 = 6$ km.

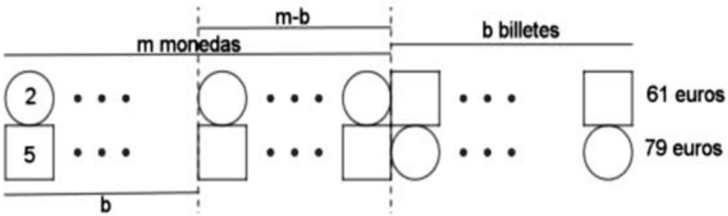
14.(E) Como en la estrofa se repite 2 veces la letra i, ha cantado dicha estrofa $348 : 2 = 174$ veces. Dado que en la estrofa se repite 6 veces la letra a, ha pronunciado $174 \times 6 = 1044$ veces la letra a. La suma de sus cifras es 9.

15.(A) Jesús va a una velocidad de $\frac{4000}{10} = 400$m/minuto. Por lo que en 4 minutos recorrerá $400 \times 4 = 1600$ m.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

16.(D) La ballena jorobada, en 50 años recorre aproximadamente 50 × 17000 = 850000 km que son 850 000 000 m. Esto descarta inmediatamente todas las soluciones a excepción de la "D) 800 millones".

17.(D) El hecho de que haya más euros después del intercambio indica que hay más monedas que billetes. Esto nos permite hacer un esquema como el de la figura.



La figura habla por sí misma y nos dice que el número de monedas, m , más el número de billetes, b , multiplicado por (5 + 2) es igual a (61 + 79), lo que lleva a: $m+b=\dfrac{140}{7}=20.$ Igualmente es fácil de comprender que la diferencia del número de monedas menos el número de billetes multiplicada por (5 – 2) es igual a (79 – 61), lo que implica: $m-b=\dfrac{18}{3}=6.$ Conocida la suma y la diferencia de m y b, es inmediato que $2 \times m = 20 + 6 = 26$ y de aquí: $m = 13$.

18.(D) Representando Manzana, Flor, Abrazo y Bombón por sus iniciales respectivas, el enunciado dice:

M = A + 2F (1)
M + F = A + B (2)
A = F + B (3)

Restando de la igualdad (2) la igualdad (3) se obtiene M + F – A = A – F que equivale a M + 2F = 2A que indica que una manzana más dos flores equivalen a dos abrazos. Pero de la igualdad (1) se deduce que 2M = 2A + 4F que quiere decir que dos manzanas equivalen a dos abrazos y y cuatro flores.

Pero como 2A = M + 2F resulta que 2M = M + 2F + 4F, es decir M = 6F. Por tanto, una Manzana equivale a 6 Flores.

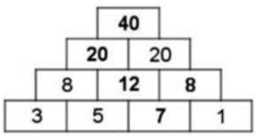
19.(C) La frase determinante es "Ana es más alta que la tenista".Que Ana sea más alta que la tenista implica que Ana no es tenista y como tampoco es la más baja, no puede ser la gimnasta. En consecuencia, Ana es nadadora.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

20.(E) El mínimo número de montones de 5 botones es 8, lo que supone $5 \times 8 + 2 = 42$ botones. Aumentando de uno en uno el número de montones tendríamos sucesivamente: 42, 47, 52, 57, 62, 67, 72 y 77 botones.
Haciendo lo mismo con montones de 7 botones tendremos sucesivamente:
46 ($7 \times 7 - 3$), 53, 60, 67, y 74 botones. Por tanto, en el costurero hay 67 botones y si los organizo en 11 montones de 6 botones cada uno, sobrará un botón.

21.(A) En CUCA, la U se puede poner de 4 formas distintas. Una vez hecho esto, para cada posición de la U, quedan 3 posibles formas de colocar la A, y una vez colocada la A, solo queda una posibilidad para las dos letras C. Por lo tanto CUCA origina $6 \times 2 \times 1 = 12$ palabras. Por otra parte, con LINO, como las cuatro letras son distintas, se pueden formar $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ palabras. Entre las dos tendremos $12 + 24 = 36$ palabras distintas.

22.(D) La suma de los dos números a la derecha del8 tiene que ser 20, por lo que llamando x al número situado entre el 5 y el 1 tendremos: $20 = (5 + x) + (x + 1)$ de donde $14 = 2 \times x$, es decir, $x = 7$. Sabiendo esto rellenamos hacia arriba "en cascada" todos los número que faltan.



La suma de los cinco números es: $40 + 20 + 12 + 8 + 7 = 87$.

23.(D) Mientras Inés corre 50 m Guillermo corre 40. Cuando Inés corra 60 m Guillermo habrá corrido x m, por lo tanto $x = \dfrac{60 \times 40}{50} = 48$ m. De donde, a Guillermo, le faltarán $60 - 48 = 12$ m para llegar a la meta.

24.(D) Si nos fijamos bien, entre los 3 han clavado 3 dardos en cada zona y han sumado $36 + 56 + 58 = 150$ puntos. Dado que Inés ha clavado uno en cada zona, sumará $150 : 3 = 50$ puntos.

25.(E) Como contestó bien a 18 y mal a 3, dejó $25 - (18 + 3) = 4$ respuestas en blanco, de modo que obtuvo $18 \times 5 + 3 \times 0 + 4 \times 1 = 94$ puntos.

XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

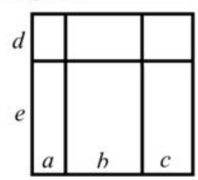
Soluciones 1ª Fase Nivel II

1. (E) I. es verdadera. La suma de un número par con un número impar es impar. El triple de un número impar es impar y el doble de cualquier número es siempre par, así que esa suma la suma es impar. Para verlo se más rigor se pueden escribir los números impares como $2m + 1$ y $2n + 1$ y sumar el triple del primero más el doble del segundo: $3(2m + 1) + 2(2n + 1) = 6m + 3 + 4n + 2 = 2\,(3m + 1 + 2n + 1) + 1$.
II. es verdadera. Entre tres números consecutivos siempre hay un múltiplo de 3 y al menos un múltiplo de 2 y por lo que el producto será múltiplo de 6.
III. es verdadera. Basta aplicar el criterio de divisibilidad del 11: la diferencia entre la suma de los dígitos que ocupan posiciones pares y los que ocupan posiciones impares es siempre 0.
IV. es verdadera. Basta aplicar el criterio de divisibilidad de 0: la suma de las cifras de todos esos números es 45 que es múltiplo de 9.

2. (A) Como bcd es múltiplo de 5, $d = 5$.
Para que cde sea múltiplo de 3 debe serlo $c + d + e = c + e + 5$. Así que $c + e$ puede valer 4 o 7 y como c solo puede ser 2 o 4, ya que abc es múltiplo de 4 la única posibilidad es que c sea 4 y e sea 3. El número $ab4$ debe ser múltiplo de 4 con a y b que solo pueden tomar los valores 1 o 2. De las dos posibilidades 124 y 214 sólo es múltiplo de 4 el 124. El número en cuestión es 12453, que es múltiplo de 7 pero no de 3, ni de 5 ni de 11 ni de 13.

3. **(B)** Calculemos cada número con cuidado:
$R = -(2-3) - 4 = -(-1) - 4 = 1 - 4 = -3$.
$S = 6 : (7 - 8) = 6 : (-1) = -6$.
$\mathrm{T} = -3 - (5 - 4) = -3 - 1 = -4$.
Vamos probando:
A) es falta: $R + S = -3 + (-6) = -9$ y $T + 5 = -4 + 5 = 1$
B) es verdadera: $R - S = -3 - (-6) = -3 + 6 = 3$ y $T + 7 = -4 + 7 = 3$
Aunque no es necesario seguir, vemos rápidamente que las demás son falsas porque **C**) $R \cdot T = 12$ y $2S = -12$, **D**) $R + 1 = -2$ y **E**) $R - S + T = -1$

4. (E) Ponemos nombres a los lados de los rectángulos como ves en la figura.
Tenemos que calcular $(a + b + c)$ que es igual a $(d + e)$.
Sabemos que $2(a + d) + 2(b + d) + 2(c + d) + 2(a + e) +$
$+ 2(b + e) + 2(c + e) = 420$.
Operando tenemos que
$4(a + b + c) + 6(d + e) = 4(d + e) + 6(d + e) = 10(d + e) = 420$.
Así pues, $d + e = 42$.



XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

5. (E) Para saberlo debemos hacer el producto en cruz y ver si son iguales. Miremos solo las cifras de las unidades de esos productos: en **A**) un producto acaba en 2 y el otro en 4, en **B**) uno en 4 y el otro en 2, en **C**) las terminaciones son 8 y 6 mientras que en **D**) son 2 y 4. Por último, en **E**) la cifra de las unidades de ambos productos es 2 y guiándonos de la pista, ya no tenemos que hacer nada más.

6. (A) Por cada 10 divisiones hacer 12 multiplicaciones y 9 restas, es decir $10 + 12 + 9 = 31$ operaciones. Como ha hecho $124 = 31\cdot 4$ hizo cuatro bloques de 31 operaciones, de las cuales 12 son multiplicaciones. Así pues, la niña Centésima hizo $4\cdot 12 = 48$ multiplicaciones.

7. (B) Toca repasar las propiedades de potencias:
$20^{20} \cdot 30^{30} = (2^2 \cdot 5)^{20} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^{30} = 2^{40} \cdot 5^{20} \cdot 2^{30} \cdot 3^{30} \cdot 5^{30} = 2^{70} \cdot 3^{30} \cdot 5^{50}$.
Entonces $a + b + c = 70 + 30 + 50 = 150$.

8. (D) Contemos cuántos doses y cuántos cincos habrá en ese producto:
Todos los múltiplos de 5 aportan un 5, salvo los que también son múltiplos de 25, que aportan 2. Como $100 = 5 \cdot 20$, hay 20 múltiplos de 5 y tres de ellos lo son también de 25, así que el producto tendrá en total $20 + 3 = 23$ cincos.
Los doses viene de $2\cdot 5$, $4\cdot 5$, $6\cdot 5$, … hasta $20\cdot 5$. En total hay 10 múltiplos de 2, de los cuáles 5 son múltiplos de 4, dos lo son 8 y uno de 16: $10 + 5 + 2 + 1 = 18$ doses habrá en el producto. Así pues, el número acabará en 18 ceros.

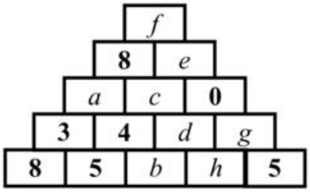
9. (A) En la etapa 1 hay un puntito y 3 líneas.
En la etapa 2 hay $1 + 3 = 4$ puntitos y $3 + 2 \cdot 3 = 9$ líneas.
En la etapa 3 hay $4 + 2 \cdot 3 = 10$ puntitos y $9 + 2^2 \cdot 3 = 21$ líneas.
En la etapa 4 habrá $10 + 2^2 \cdot 3 = 22$ puntitos y $21 + 2^3 \cdot 3 = 45$ líneas.
En la etapa 5 añadiremos $2^3 \cdot 3$ puntitos y $2^4 \cdot 3$ líneas más, así que tendremos $22 + 24 = 46$ puntitos y $45 + 48 = 93$ líneas.
Para saber cuántos habrá en la etapa 6 debemos sumar $2^4 \cdot 3$ puntitos y $2^5 \cdot 3$ líneas lo que da $46 + 48 = 94$ puntitos y $93 + 96 = 189$ líneas. En número total de puntitos y líneas es $94 + 189 = 283$.

10.(C) El volumen de cada cubo es $448 : 7 = 64$ dm^3, así el lado de cada cubo mide 4. Cada cubo de fuera tiene 5 caras visibles, así que hay que forrar $6\cdot 5 = 30$ caras, así que necesito $30\cdot 4^2 = 480$ dm^2 de papel.

11.(D) Si yendo a 4 km/h tarda t horas, yendo a 3 km/h tarda $t + 1/2$ horas. Como la distancia recorrida en ambos casos es la misma, debe ser $4t = 3(t + 1/2)$.
Luego $t = 3/2$. Es decir, a 4 km/h tarda una hora y media, luego recorre 6 km.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

12.(E) De entrada vemos que $a = 7$ y $b = 9$. Ahora es fácil ver que $c = 1$. Y si $c =1$, debe ser $d = 7$ y $e = 1$. Ahora es fácil ver que $f = 9$ y $g =3$. Por último, $h = 8$.
La suma es $7 + 9 + 1 + 7 + 1 + 9 + 3 + 8 = 45$.



13.(D) Vamos poco a poco de abajo arriba:

$$1+\frac{2}{1+\frac{3}{1+4}}=1+\frac{2}{1+\frac{3}{5}}=1+\frac{2}{\frac{8}{5}}=1+\frac{10}{8}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}$$

14.(D) Un número es múltiplo de 4 si el número formado por sus dos últimas cifras lo es. Los números de dos cifras múltiplos de cuatro que podemos formar son: 24, 28, 48, 64 y 84. Por cada uno de ellos podemos formar dos números de cuatro cifras múltiplo de 4: 68**24** y 86**24**, 46**28** y 64**28**, etc. En total podemos formar $2 \cdot 6 = 12$ múltiplos de 4.

15.(A) Buscamos tres números A, B y C que cumplan que los siguientes porcentajes sean números enteros e iguales: 15% de A, 32% de B, 40% de C y $A + B + C$ menor que 300. Como calcular el 15% es lo mismo que calcular 3/20, A tiene que ser divisible entre 20 y el resultado será múltiplo de 3. Calcular el 32% es como calcular 8/25 así que B debe ser múltiplo de 25 y el resultado será múltiplo de 8 y de 3, por lo dicho sobre A. Probemos con $B = 25 \cdot 3 = 75$, que es el valor menor para B. 32% de B = 32% 75 = 24. A tendría que ser $24 \cdot 20/3 = 160$ y C será $24 \cdot 5/2 = 60$. En total tienen $160 + 75 + 60 = 295$ discos.

16.(D) N debe ser par y al multiplicarlo por 4 debe ser menor que 10, así que N = 2.
R podría ser 3 o 8, pero como N · E = R, debe ser 8. O es impar, y al multiplicarlo por 4 da un número menor que 10, así que solo puede ser 1 y A será 7. La cifra de las decenas al multiplicar T por 4 es 3 y la de las unidades es T – 3, así que T es 9. Las cifras 3, 5 y 6 serán las letras C, I y S, que suman 14, por lo que la suma buscada es: 8 + 7 + 9 + 1 + 2 + C + I + 9 + 1 + S = 37 + 14 = 51

17.(B) En el exterior hay 8 rombos blancos y para cada uno de ellos hacen falta 4 palillos, que suman 32 palillos. En el interior hay 8 rombos, pero como comparten lados, para cada uno de ellos hacen falta 3 palillos que suman 24 palillos. En total hay 32 + 24 = 56 palillos que colocados uno detrás de otro miden 5,6 metros.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

18.(C) Si el lado del cuadrado mide C y el lado triángulo mide T, sabemos que $4C = 3T$ y por tanto $C/T = 3/4$.

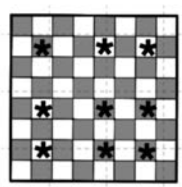
19.(A) Como $20\,000 = 2^5 \cdot 5^4$, si los números no son múltiplos de 10, el menor debe ser $2^5 = 32$ y el mayor $5^4 = 625$. La diferencia es 593.

20. (B) $10^{100} + 100^{10} = 10^{100} + (10^2)^{10} = 10^{100} + 10^{20} = 10^{20} \cdot 10^{80} + 10^{20} = 10^{20}\,(10^{80} + 1)$.

21.(B) Tenemos que ver cuántos cuadrados perfectos hay entre 11 y 109: 4^2, 5^2, … hasta 10^2. En total a puede tomar 7 valores.

22.(E) Primero simplifiquemos:
4 bats = 1 bet; 15 bets = 2 bits, 6 bits = 5 bots, 3 bots = 1 but.
Ahora vamos hacia atrás: 4 buts = 12 bots = 14,4 bits =108 bets = 432 bats.

23.(A) En el ejemplo se ve que con 9 es suficiente.



24.(B) Todas las posibilidades son (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5) (2, 4, 5) y (3, 4, 5) y las únicas en que 4 es la carta mayor son (1, 2, 4), (1, 3, 4) y (2, 3, 4). Como todas las combinaciones son igualmente probables, la probabilidad es casos favorables/casos posibles, es decir 3/ 10.

25.(B) La suma de las áreas de los triángulos blancos ADE y BFC es 3 pues, si llamamos h a la altura de uno de ellos, la altura del otro será $3 - 1 - h = 2 - h$ y la suma de sus áreas $3h/2 + 3(2 - h)/2 = 3$. El área de la zona sombreada es el área del cuadrado menos el área de los triángulos, es decir, $3^2 - 3 = 6$.

XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 1ª Fase Nivel III

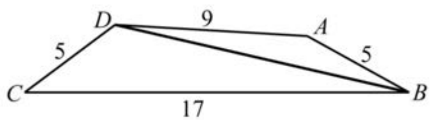
1. (B) Los puntos que distan 3 cm de P están en una circunferencia C', luego si además están en C deben ser puntos de intersección de dos circunferencias distintas y que por tanto a lo más se cortan en dos puntos.

2. (D) En cada ciclo de entradas por las cinco puertas entran 1+ 2+ 3+ 4+ 5 personas. Así que dividimos 2019 entre 15, y tenemos que después de 134 ciclos han entrado 2010 personas. La persona 2019 será la persona 9 del siguiente ciclo y entrará por la puerta cuarta.

3. (B) Si $a \cdot b > 0$, entonces a y b tienen igual signo y por tanto, como $a + b < 0$, ambos deben ser negativos.

4. (D) El producto $\frac{n! \cdot (n+1)!}{2}$ se puede escribir como $\frac{(n!)^2 \cdot (n+1)}{2}$, y así, para que la expresión sea un cuadrado perfecto lo debe ser $\frac{n+1}{2}$. Es decir, $n + 1$ debe ser el doble de un cuadrado. Eso ocurre con 18.

5. (C) Por ser lado de DBA, DB debe estar estrictamente entre 9 – 5 y 9 + 5. Por ser lado de CBD, DB debe estar (también estrictamente) entre 17 – 5 y 17 + 5, así que $DB = 13$.



6. (D) $1812b42a = 18 \cdot 999999 + 12 \cdot 9999 + b4 \cdot 99 + 18 + 12 + 2a$.

Así que n será múltiplo de 99 si lo es $18 + 12 + b4 + 2a = 30 + b4 + 2a$; es decir si esta última suma es 99 o 198.
Lo último por tamaño no es posible así que $b4 + 2a = 69$, y por ello $a = 5$ y $b = 4$.

7. (E) Como $a^2 = a + 1$, entonces $a^4 = (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a + 1\ 2a + 1 = 3a + 2$, y

$$a^6 = a^4 \cdot a^2 = (3a+2)\cdot(a+1) = 3a^2 + 3a + 2a + 2 = 3(a+1) + 5a + 2 = 8a + 5\ .$$

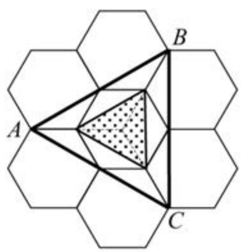
XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

8. (B) La suma de sus dígitos es como mucho 27 y seis veces la suma de sus dígitos es como mucho 162. Luego habrá que buscar entre los números múltiplos de 6 menores que 162. Los candidatos son:
6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96, 102,… De aquí en adelante hasta el 162 no hay ningún número que verifique que seis veces la suma de sus cifras sea superior a 100.
De todos ellos el único que verifica la condición exigida es $54 = 6\cdot(5 + 4)$

9. (C) $z(1) + z(2) +…+ z(9) = 45$; $z(10) + z(11) +…+ z(19) = 45 + 10$
$z(20) + z(21) +…+ z(29) = 45 + 20$ $z(30) + z(31) +…+ z(39) = 45 + 30$
……………………. ………………..
$z(80) + z(81) +…+ z(89) = 45 + 80$ $z(90) + z(91) +…+ z(99) = 45 + 90$
Luego $z(1) + z(2) +…+ z(99) = 450 + 10 + 20 +…+ 90 = 450 + 450 = 900$.

10. (E) Las sucesivas terminaciones de las potencias de 3 son 3, 9, 7, 1, 3, 9,…, es decir se repiten cada cuatro pasos, y así $3^{2017} = 3^{2016 + 1}$ acaba en 3, y $13^{2019} = 13^{2016 + 3}$ acaba en 7.
Las sucesivas terminaciones de las potencias de 7 son 7, 9, 3, 1, 7, 9, …, y por tanto $7^{2018} = 7^{2016 + 2}$ acaba en 9. De esta manera $3^{2017} \cdot 7^{2018} \cdot 13^{2019}$ termina igual que $3\cdot9\cdot7$, es decir en 9.

11.(C) Basta con dibujar un triángulo equilátero inscrito en el hexágono central paralelo al triángulo *ABC* para darse cuenta de que el área de *ABC* es dos veces el área del hexágono de lado 1. Así el área pedida es $2\cdot6\cdot\frac{1^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$



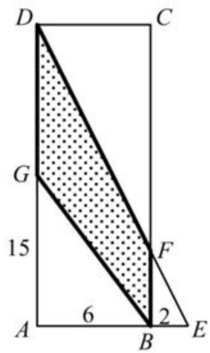
12.(C) $f(x+1) - f(x) = 4^{x+1} - 4^x = 4^x(4-1) = 3\cdot4^x$.

13.(B) Como $1 < (x - 2)^2 < 25$ equivale a $1 < |x-2| < 5$ se tiene que x debe distar de 2 más de 1 y menos de 5. Las soluciones positivas son: 4, 5 y 6; y el resto son los números simétricos respecto a 2: 0, –1, –2. Luego la suma de las soluciones es 12.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

14.(C) El dibujo (no a escala) es parecido al de la derecha. Denominemos por $S(Q)$ al área de un polígono Q. Entonces $S(GBFD) = (S(AED) - S(BEF)) - S(ABG)$. Pero AED y BEF son semejantes en razón de 8 a 2, y por tanto el área de BEF es 1/16 del área de AED, de donde:

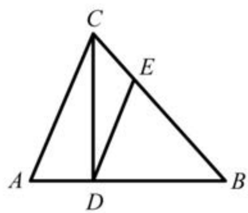
$$S(GBFD) = \frac{15}{16}S(AED) - S(ABG) = \frac{15}{16}\cdot\frac{8\cdot 30}{2} - \frac{6\cdot 15}{2} = \frac{135}{2}$$



15.(C) Como hay declaraciones contradictorias Acutángulo es culpable. De las declaraciones de Centésima y Don Retorcido se deduce que al menos uno de ellos es culpable, y ya llevaríamos al menos dos culpables, luego Centésima es culpable y Gustavo es inocente. De esta forma Don Retorcido es culpable. Queda solo en duda la calificación de Comenúmeros, pero su declaración sería cierta si él fuera inocente y en cambio si él fuera culpable haría que la declaración de Don Retorcido fuera cierta. Luego hay tres culpables y dos inocentes.

16.(B) El área de ADC es la mitad de la de DBC. El área de BDC es cuatro veces el área de DEC. Por tanto el área de ABC es:

$$4\cdot 9 + \frac{4\cdot 9}{2} = 36 + 18 = 54.$$



17.(A) Si en 500 m nadando ha hecho una media de 4 km/h ha tardado en hacerlo 0,5 : 4 h, es decir 7,5 minutos. Si ha hecho una media corriendo de 12 km/h en 6 km, ha tardado en hacerlo 30 minutos.

Le quedan 82,5 minutos para completar las 2 horas y en ese tiempo debe recorrer 20 km en bicicleta.

La velocidad media pedaleando debe ser

$$\frac{20km}{82{,}5\min} = \frac{20km}{\frac{82{,}5}{60}h} = \frac{20\cdot 60km}{82{,}5h} = \frac{1200}{82{,}5}km/h = \frac{2400}{165}km/h = \frac{160}{11}km/h$$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

18.(A) Contaremos primero los números en los que no aparece el 0. Así, con dos unos, para que el número sea múltiplo de tres, tenemos dos cifras (4 y 7) a colocar como centenas, decenas o unidades ($2 \cdot 3 = 6$), con dos doses podemos coger como tercera cifra 5 u 8 (otros seis números), y así (al no entrar el 0) lo mismo pasa con dos treses, dos cuatros, … Luego ya tenemos $9 \cdot 6 = 54$ números. Ahora entra el 0. Con dos ceros hay tres números (300, 600 y 900). Con un cero (que no puede estar en primera posición) y otras dos cifras iguales tenemos 330, 660, 990, 303, 606, 909. En total tenemos $54 + 3 + 6 = 63$ números.

19.(C) Como $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$ probamos esta descomposición con cada una de las fracciones.

$\frac{25}{12}=\frac{3^2+4^2}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}+\frac{4}{3}$; $\qquad \frac{10}{3}=\frac{3^2+1^2}{3\cdot 1}=\frac{3}{1}+\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{17}{4}=\frac{1^2+4^2}{1\cdot 4}=\frac{1}{4}+\frac{4}{1}$;

$\frac{29}{10}=\frac{5^2+2^2}{2\cdot 5}=\frac{5}{2}+\frac{2}{5}$

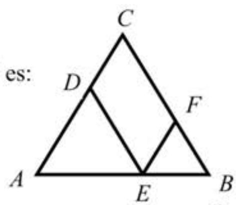
El único que parece resistirse es $\frac{7}{3}$ y ello le hace candidato a la respuesta. Justifiquemos sin embargo que es así:

Si $\frac{7}{3}=\frac{a^2+b^2}{ab} \Leftrightarrow 7ab=3a^2+3b^2 \Leftrightarrow 3a^2-7ab+3b^2=0$.

Entonces $a=\frac{7b\pm\sqrt{49b^2-36b^2}}{6}$, pero si b es entero, $\frac{b\pm b\sqrt{13}}{6}=b\left(\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}\right)$ no es racional.

20.(B) $CD + DE = CA = 4/2 = 2$. Luego el área del triángulo ABC es:

$\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$



21.(B) El reloj marcará mal cualquier hora : minuto cuya escritura_ _ : _ _ contenga un 1. Contemos las lecturas horarias que no tienen 1.
En la primera posición hay 2 posibles cifras (0 y 2); para la segunda posición hay 9 cifras cuando en la primera está el 0 y 3 cifras si en la primera está el 2; para la tercera posición hay cinco cifras; y para la cuarta hay 9. En total $(9 + 3)\cdot 5\cdot 9 = 540$ lecturas horarias correctas sobre un total de $24\cdot 60 = 1440$ lecturas diarias. La proporción de lecturas incorrectas sobre el total de lecturas es: $1-\frac{540}{1440}=\frac{5}{8}$

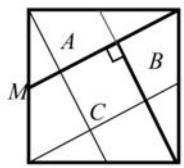
XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

22.(E) Escribamos el árbol de resultados

<table>
<tr><td colspan="8">6</td></tr>
<tr><td colspan="4">11</td><td colspan="4">2</td></tr>
<tr><td colspan="2">21</td><td colspan="2">4,5</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>41</td><td>9,5</td><td>8</td><td>1,25</td><td>5</td><td>0,5</td><td>-1</td><td>-1</td></tr>
</table>

En la fila cuarta hay cinco enteros (cinco sobre ocho).

23.(B) Nuestro trozo de tarta tiene forma de prisma triangular. Si en la cara superior de la tarta-cubo dibujamos algunas líneas auxiliares, podemos darnos cuenta que el triángulo B equivale a una quinta parte de la cara cuadrada, y por tanto su área es $\frac{1}{5}\cdot 2^2\ dm^2$. La superficie chocolateada de nuestro trozo es $\left(\frac{4}{5}+2^2\right)dm^2$.



24.(B) Fijada la posición del cubo colocado sobre una mesa y con una cara frontal a nosotros, veamos cuál es la probabilidad de que se forme un cuadrado paralelo a las bases. Para ello en cada una de las cuatro caras del cubo perpendiculares a la mesa se tiene que elegir el segmento que une puntos medios que es paralelo a la base, y eso se puede hacer de una entre 16 posibilidades. Lo mismo ocurre para formar un cuadrado paralelo a la frontal o un cuadrado paralelo a los laterales.

25.(A) Las formas de sentarse deben ser alternadas chico-chica (empezando por chico al haber uno más). Si suponemos que Luis está a la izquierda de Pilar, y sentamos a Luis en la primera butaca, después va Pilar y luego los demás chicos se pueden colocar de 3! formas y las otras chicas de 2!formas. Lo mismo ocurrirá si colocamos a Luis en la segunda butaca, en la tercera, …, en la sexta. Luego yahay $6 \cdot 3! \cdot 2!$ formas de sentarse los siete. Otras tantas se tendrán si Luis se sienta a la derecha de Pilar. Así el número de formas de sentarse es $2 \cdot 72 = 144$.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas
Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (D) Llamando $AP = AN = x$; $BP = BM = y$; $CN = CM = z$, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=10 \\ x+z=6 \\ y+z=9 \end{array}\right\} \; E_1+E_2+E_3 \Rightarrow 2x+2y+2z=25 \Rightarrow x+y+z=12{,}5$$

Como $\left.\begin{array}{r} y+z=9 \\ x+y+z=12{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3{,}5$

2. (D) Entre tres números consecutivos hay, necesariamente un número par y un múltiplo de 3. Si además sabemos que el producto de los tres es múltiplo de 7, dicho producto debe ser necesariamente múltiplo de 6 (2 · 3), de 14 (2 · 7), de 21 (3 · 7) y de 42 (2 · 3 · 7). El único de la lista del que no tiene que ser necesariamente múltiplo es 28.

3. (A) Si la ecuación $x^2 - n^2x + 2n = 0$ tiene como solución $x = 2$, se cumple que

$$4-2n^2+2n=0 \Leftrightarrow n^2-n-2=0 \Rightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ n=-1 \end{cases}$$

Si $n = 2$, la ecuación tiene dos soluciones iguales, en contra de lo que dice el enunciado. Por tanto, $n = -1$.

4. (C) Hay dos posibilidades para Esteban. Que se coloque en un extremo o que lo haga en una posición intermedia.
Si se coloca en un extremo, a su lado pueden colocarse sólo Javier o María, y en cada caso hay 4 posibles colocaciones de los otros 3, ya que Javier y María no pueden ir juntos. Así pues, 4 posibilidades con Esteban en un extremo por 4 posibilidades de los otros 3 en cada caso, en total hacen 16 posibilidades.
Si se coloca en una posición intermedia, a sus lados deben ir Javier y María, lo que da dos posibilidades en cada caso. Los otros dos personajes se pueden colocar de dos formas distintas en cada caso, de modo que hay 4 posibilidades con Esteban en cada uno de los lugares intermedios. Como hay tres lugares intermedios, en este caso hay 12 posibilidades.
Sumando las posibilidades de los dos casos, hay un total de 28 posibles colocaciones con las condiciones de incompatibilidad entre los personajes.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

5. (E) $z^{12} - 64 = 0 \Rightarrow z_k = \sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{64_0} = \left(\sqrt{2}\right)_{\frac{0+360k}{12}} = \left(\sqrt{12}\right)_{30k} \quad k = 0,1,2,3,...,11$

z_k tiene su parte real positiva para los argumentos del primer y cuarto cuadrantes. Es decir, para $k = 0$, 1, 2, 10 y 11. Por tanto tenemos que calcular la suma:

$S = z_0 + z_1 + z_2 + z_{10} + z_{11} = \left(\sqrt{2}\right)_0 + \left(\sqrt{2}\right)_{30} + \left(\sqrt{2}\right)_{60} + \left(\sqrt{2}\right)_{300} + \left(\sqrt{2}\right)_{330}$

El primer sumando tiene parte imaginaria 0, y de los otros cuatro las partes imaginarias se anulan dos a dos, de modo que la suma resulta:

$$S = \sqrt{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

6. (C) El número de posibilidades de obtener suma de puntos igual a 6 es 7. Seis de ellas con las bolitas numeradas 1, 2 y 3 y una de ellas con las bolitas numeradas 2, 2 y 2.

La probabilidad de haber obtenido 6 con las tres bolitas iguales, por tanto, es $\frac{1}{7}$

7. (D) Los números de la lista se pueden escribir:

$10-3\sqrt{11}$	$3\sqrt{11}-10$	$18-5\sqrt{13}$	$51-10\sqrt{26}$	$10\sqrt{26}-51$
$\sqrt{100}-\sqrt{99}$	$\sqrt{99}-\sqrt{100}$	$\sqrt{324}-\sqrt{325}$	$\sqrt{2601}-\sqrt{2600}$	$\sqrt{2600}-\sqrt{2601}$

De esta lista, los dos únicos números positivos son $10-3\sqrt{11} = \sqrt{100}-\sqrt{99}$ y $51-10\sqrt{26} = \sqrt{2601}-\sqrt{2600}$.

La función $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ es decreciente puesto que

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} < 0 \quad \forall x \in D_f$ puesto que $\sqrt{x} > \sqrt{x-1}$ y por lo tanto

$\frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$. En consecuencia $f(100) > f(2601)$ es decir,

$\sqrt{100}-\sqrt{99} = 10-3\sqrt{11} > \sqrt{2601}-\sqrt{2600} = 51-10\sqrt{26}$ t.

8. (C) Manipulamos un poco la ecuación:

$\text{sen}^2x + 3\text{sen}x\cos x + 2\cos^2x = 0 \Leftrightarrow (\text{sen}x + \cos x)^2 + (\text{sen}x + \cos x)\cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\text{sen}x + \cos x)(\text{sen}x + 2\cos x) = 0 \Rightarrow (\text{sen}x + \cos x) = 0$ o que $(\text{sen}x + 2\cos x) = 0$

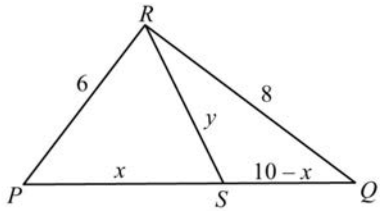
De la primera opción $\text{sen}x = -\cos x$ se deduce que $\text{tg}x = -1$.

De la segunda opción $\text{sen}x = -2\cos x$ se deduce que $\text{tg}x = -2$.

En el intervalo $[0, \pi)$ cada una de las ecuaciones anteriores tiene solución única, ambas en el segundo cuadrante. Por tanto, la ecuación original tiene dos soluciones en dicho intervalo.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

9. (A) La hipotenusa del triángulo es $PQ = \sqrt{36+64} = 10$. Como PRS y RQS tienen el mismo perímetro, se cumple que, $6 + x + y = 8 + y + 10 - x \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$. El triángulo RQS tiene base $SQ = 10 - 6 = 4$. Y como tiene la misma altura que el triángulo PQR, su área es $A_{SQR} = \frac{4}{10} A_{PQR} = \frac{2}{5}\left(\frac{6 \cdot 8}{2}\right) = 9{,}6$.



10.(C) Factorizamos la resta aplicando el binomio de Newton:

$13^4 - 11^4 = (12 + 1)^4 - (12 - 1)^4 =$
$= (12^4 + 4 \cdot 12^3 + 6 \cdot 12^2 + 4 \cdot 12 + 1) - (12^4 - 4 \cdot 12^3 + 6 \cdot 12^2 - 4 \cdot 12 + 1) =$
$= 8 \cdot 12^3 + 8 \cdot 12 = 8 \cdot 12 \cdot (144 + 1) = 8 \cdot 12 \cdot 145 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$.
La máxima potencia de 2 que divide a $13^4 - 11^4$ es $2^5 = 32$.

11.(D) Para que $\frac{y}{12} < \frac{13}{15}$ el máximo valor posible para y es 10.

Para que $\frac{7}{x} < \frac{y}{12}$, con el máximo valor posible para y, el mínimo valor entero posible para x es 9. Así pues, el valor de $x + y$ con el mínimo posible de x y el máximo posible de y es 19.

12.(C) El número N = 12345….4344, está formado por 15 unos, 15 doses, 15 treses, 10 cuatros, 4 cincos, 4 seises, 4 sietes, 4 ochos, 4 nueves y 4 ceros. En total, 79 cifras. La suma de todas ellas es $S = 15 \cdot (1 + 2 + 3) + 10 \cdot 4 + 4 \cdot (5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 270$. Entonces N es múltiplo de 9, pero es obvio que no lo es de 5. Descontemos del número cantidades de 9 en 9 hasta encontrar un múltiplo de 5, que será también múltiplo de 45. Como N – 9 ya termina en 5, y es múltiplo de 9, también lo es de 45, y el resto al dividir N entre 45 es 9.

13.(A) Para hallar el t % de un número hay que multiplicar el número por $\frac{t}{100}$. Por tanto,

$$0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 50 = 0{,}6x \Rightarrow x = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 50}{0{,}6} = 0{,}04 \cdot 50 = 2$$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

14.(E) La ecuación $|sen\ x| = 1$ tiene las soluciones $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Nos piden las positivas que son menores que 100.

Como $\dfrac{100}{\pi} = 31{,}8...$ y $\dfrac{\pi}{2} < 0{,}8\pi$, valen todos los valores de k desde 0 hasta 31, que hacen un total de 32 soluciones

15.(D) Construimos una tabla con los valores de $f(n)$ para los primeros valores de n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f(n)$	1	2	4	4	8	8	16	8	16	16	32	16	32	32	64	16	32

A partir de n = 16, los valores de $f(n)$ aumentan, de modo que no hay más naturales cuya imagen mediante f sea 16. En total hay 5 valores.

16.(A) Con el dato $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{(n \cdot (n+1))^2}{4}$, podemos calcular

$$1^3 + 2^3 + ... + 19^3 = \frac{(19 \cdot 20)^2}{4} = 36\,100$$

Pero de esta suma tenemos que descontar

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + 18^3 = 2^3\left(1^3 + 2^3 + ... + 9^3\right) = 8 \cdot \frac{(9 \cdot 10)^2}{4} = 2 \cdot 8100 = 16\,200$$

De modo que la suma pedida es: $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + 19^3 = 36100 - 16200 = 19900$

17.(C) Aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos que la diagonal

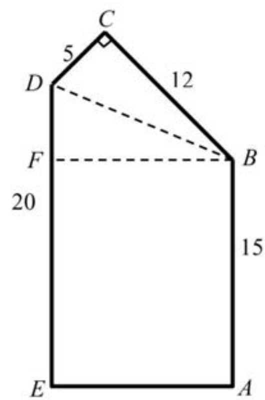
$$DB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 .$$

Trazamos la perpendicular a DE desde B y obtenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 13, y uno de los catetos 20 – 15 = 5. Por tanto, el otro cateto, que coincide con la base AE, mide $FB = AE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

El área del pentágono es:

$$A_{ABCDE} = A_{BCD} + A_{BDF} + A_{ABFE}$$

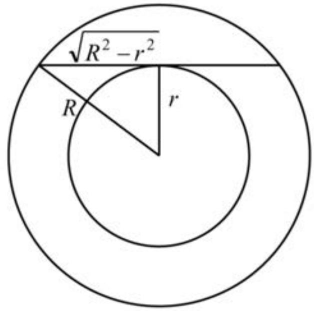
$$A_{ABCDE} = \frac{5 \cdot 12}{2} + \frac{5 \cdot 12}{2} + 15 \cdot 12 = 240$$



XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

18.(C) El área de la corona circular es

$$\pi\left(R^2-r^2\right)=\frac{9}{2}\pi \Rightarrow R^2-r^2=\frac{9}{2}$$



En la figura se puede apreciar que aplicando el teorema de Pitágoras, la longitud de la cuerda del círculo mayor que es tangente al círculo menor vale

$$l=2\sqrt{R^2-r^2}=2\sqrt{\frac{9}{2}}=3\sqrt{2}.$$

19.(B) Considerando las clases módulo 3 de los números que colocamos en cada vértice, estos solo pueden ser 0, 1 o 2. Las condiciones son que no sea múltiplo de 3 la suma de dos contiguos ni la suma de tres consecutivos. Por tanto, no pueden ir contiguos ni 1 y 2 ni dos 0. Además, tampoco pueden ir consecutivos tres 1, tres 2 ni 0, 1 y 2. Según esto, entonces:

- ❖ Si en un vértice cualquiera colocamos un 0, a sus lados pueden ir:
  - Dos 1, y entonces los otro dos deben ser un 1 y un 0.
  - Un 1 y un 2, y entonces los otros dos deben ser un 1 y un 0 respectivamente o un 0 y un 2.
  - Dos 2, y entonces los otros dos deben ser un 2 y un 0.

En todos los casos es necesario colocar exactamente dos 0

- ❖ Si en un vértice cualquiera colocamos un 1, a sus lados deben ir un 1y un 0, y al lado del segundo 1 necesariamente un 0. El quinto debe ser un 1 o un 2. De modo que necesitamos colocar exactamente dos 0.
- ❖ Si colocamos un 2, a sus lados pueden ir:
  - Un 2 y un 0, y entonces, al lado del segundo 2 necesariamente debemos colocar un 0, y el 5º puede ser un 1 o un 2, pero no un 0.
  - O también podemos colocar dos 0, pero entonces los otros dos vértices deben contener sendos 2.

En cualquier caso, hay que colocar exactamente dos múltiplos de 3.

20.(A) Los resultados posibles para cuatro sets son $2^4=16$. Pero hay 4 de ellos que no corresponden a haber llegado al cuarto set, porque se habría terminado el partido en el tercero (AAA_) y (BBB_). De los 12 resultados posibles restantes hay 6 en los que no se ha terminado el partido todavía (AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA) y otros 6 en los que se ha terminado el partido, justo en el cuarto set. Por tanto, la probabilidad es $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

21.(A) El triángulo PXC es semejante al triángulo ABC.

Por tanto, $\frac{PX}{4}=\frac{XC}{3} \Rightarrow \frac{PX}{4}=\frac{2}{3} \Rightarrow PX=\frac{8}{3}$ y $PD=\frac{8}{3}-1=\frac{5}{3}$

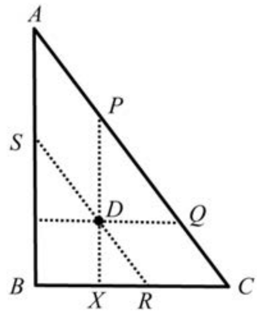
El triángulo PDQ es también semejante al ABC.

Por tanto, $\frac{PD}{4}=\frac{PQ}{5} \Rightarrow \frac{\frac{5}{3}}{4}=\frac{PQ}{5} \Rightarrow PQ=\frac{25}{12}$

El triángulo BSR es semejante al ABC, y $BS=AB-PD=4-\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$.

Por tanto, $\frac{BS}{4}=\frac{SR}{5} \Rightarrow \frac{\frac{7}{3}}{4}=\frac{SR}{5} \Rightarrow SR=\frac{35}{12}$.

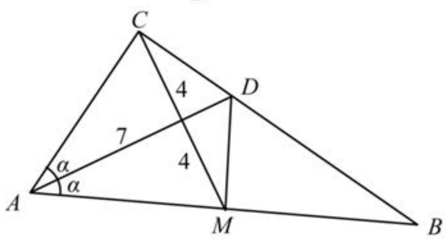
Y la suma es $PQ+SR=\frac{25}{12}+\frac{35}{12}=5$



22.(C) El ángulo que nos piden es un ángulo interior de una circunferencia, que vale la semisuma de los arcos que abarca. Cada arco comprendido por un lado del decágono mide 36°. Por tanto, $\alpha=\frac{36^o+72^o}{2}=54^o$

23.(C) Llamamos D al punto de intersección de la bisectriz con el lado BC y M al punto medio del lado AC. Trazando el segmento DM se forman tres triángulos con la misma área, ACD, ADM y MBD. ACD y ADM son iguales, pues tienen sus tres ángulos iguales y sus tres lados iguales, al ser la bisectriz ADM perpendicular a la mediana. El tercer triángulo, MBD, tiene la misma base que, puesto que $AM = MB$ al ser M el punto medio, y la misma altura.

Como el área del triángulo ACD es $\frac{7\cdot 4}{2}=14$, el área del triángulo ABC es 42.



XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

24.(B) Usando el dato de que $z^4 + z^2 + 1 = 0$, podemos escribir:

$z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z^1 + 1 =$

$= z^{12} + z^{10} + z^8 + z^{11} + z^9 + z^7 + z^6 + z^4 + z^2 + z^5 + z^3 + z^1 + 1 =$

$= z^8(z^4 + z^2 + 1) + z^7(z^4 + z^2 + 1) + z^2(z^4 + z^2 + 1) + z(z^4 + z^2 + 1) + 1 =$

$= z^8 \cdot 0 + z^7 \cdot 0 + z^2 \cdot 0 + z \cdot 0 + 1 = 1$

25.(B) Sabemos que la suma de los ángulos de un polígono de n lados es

$$\sum \alpha_i = (n-2)180^\circ .$$

Al dividir 2019° entre 180° no obtenemos un resultado exacto, siendo el resto 39°, ya que 2019° = 11 · 180° + 39°. Por consiguiente, el ángulo que se ha duplicado medía 39°.

XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 2ª Fase Nivel I

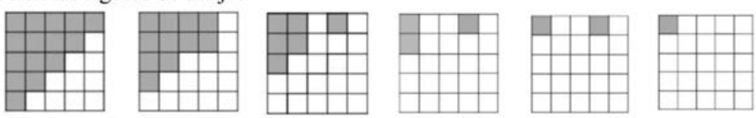
1. (D) Mediante tanteos obtenemos las cifras que faltan en la multiplicación; así: Para obtener un 8 en la cifra de las unidades del producto, la cifra que falta en el multiplicando es 3, (producto de 6 por 3 es el único que tiene la cifra 8 en las unidades). La cifra de las decenas del producto es 5 (6 por 4, 24; más 1, 25). Ahora tenemos que la cifra de las centenas del multiplicando puede ser 5 o 6, pero desechamos el 6 porque conduce a un 8 en el producto. Tenemos pues que nuestro producto es:

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & \mathbf{5} & 4 & \mathbf{3} \\ & & & \times & 6 \\ \hline 1 & 5 & \mathbf{2} & \mathbf{5} & 8 \end{array}$$

Calculamos la suma de las cifras comidas: $5 + 3 + 2 + 5 = 15$.

2.(C) Salta a la vista que el triángulo de cartulina no se puede desplazar en las figuras 3ª y la 5ª.

3. (D) El conteo se facilita dibujando las distintas plantas de la construcción tal y como se ve en las figuras de abajo.



Tenemos entonces: $15 + 11 + 6 + 3 + 2 + 1 = 38$ cubos.

4. (D) Existen tres posibilidades disjuntas: a)La cifra distinta es la primera, b) la cifra distinta es la segunda y c) la cifra distinta es la tercera.
En el caso a) la primera cifra puede elegirse de 9 formas distintas (el cero no sirve). Una vez hecho esto las otras dos cifras (iguales) pueden elegirse de 9 formas, lo que da $9 \times 9 = 81$ números. En el caso b) la primera y tercera cifra puede elegirse también de 9 formas (el cero no sirve) y, una vez hecho esto, para la cifra central quedan otras 9 posibilidades, por lo que para este caso tendremos también $9 \times 9 = 81$ números. Finalmente para el caso c), la primera cifra y, por tanto, la segunda puede elegirse puede elegirse de 9 formas y, para la tercera quedan otras 9, con lo que tenemos otros 81 números.
En consecuencia, habrá $3 \times 81 = 243$ números.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

5. (D) Es inmediato ver que las opciones D) y E) son más probables que las demás, y muy fácil contar los casos favorables de E): 19 casos y de D): 20 casos. Por lo tanto, el suceso más probable es que sea múltiplo de 5, la respuesta D.

6. (C) Si el tablero fuese de 7 × 7 casillas es evidente que el máximo número de reyes que podrá colocar es 4 × 4 = 16, tal como se muestra en la figura.En ella se exhibe también una de las cuatro posibles formas de completar el tablero (manteniendo siempre la máxima densidad de reyes) y tener uno de ajedrez. Vemos así que de ninguna forma podemos añadir un Rey que no amenace a ningún otro. Por tanto el mayor número de reyes que podemos colocar es 16.

R		R		R		R
R		R		R		R
R		R		R		R
R		R		R		R

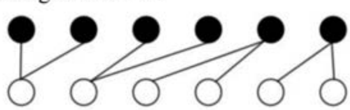
En general, en un tablero de $n \times n$ se pueden colocar $2n$ fichas que no estén alineadas. En un tablero de 8 × 8 se pueden colocar 16 reyes.

7. (B) La hora de sacar el bizcocho se calcula sumando a las 11:45 h, una hora y tres cuartos (1:45)
11 h 55 min + 1 h 45 min = 12 h 100 min = 13 h 40 min = 13:40

8. (C) Basta leer en la gráfica la puntuación de cada partido y hacer la media aritmética de los seis partidos:

$$\frac{5+2+3+4+3+4}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5\,.$$

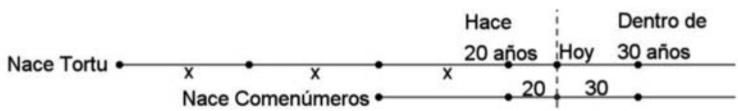
9. (D) Como dos cuentas negras más una blanca valen más que dos blancas más una negra, sabemos que una cuenta negra vale más que una blanca.
Por otra parte tenemos 6 + 8 = 14 cuentas, con las que como máximo podemos hacer 4 collares (14 = 3 × 4 + 2) y sobrarán 2 cuentas, que deben ser blancas si queremos obtener el máximo beneficio. Tenemos, pues, que intentar formar collares con 6 negras y 6 blancas sin que sobre ninguna cuenta.
La figura muestra cómo hacerlo.
Tendremos entonces 2 collares de 6 euros y 2 collares de 5 euros que, en total, valen:
2 × 6 + 2 × 5 = 22 €.



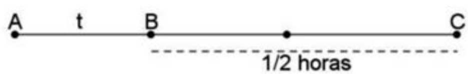
XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

10.(C) Centésima calculó la multiplicación siguiente: $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 37 \times 38$. Este producto terminará en un número de ceros igual al número de veces que aparezca el producto 2×5 en su descomposición en factores primos.
Dado que, evidentemente, el factor 2 aparece en nuestro producto más veces que el factor 5, bastará contar el número de veces que aparece el 5.
El factor 5 aparecerá en:
$5 = 1 \times 5$; $10 = 2 \times 5$; $15 = 3 \times 5$; $20 = 4 \times 5$; $25 = 5 \times 5$; $30 = 6 \times 5$ y $35 = 7 \times 5$.
El 5 aparece 8 veces en la multiplicación.
Por tanto, el resultado de la multiplicación terminará en 8 ceros.

11.(A) El problema es sencillo si representamos el enunciado en un esquema temporal como el de la figura. Dado que dentro de 30 años *la mitad izquierda* es igual a *la mitad derecha,* deducimos que x es igual a 50 años. Por consiguiente, hoy, la edad de doña Tortu es el triple de 50 más 20, es decir, 170 años.



12.(E) Cómo el Lobo Feroz va tres veces más rápido que Caperucita, esta tardará en llegar a la casa el triple del tiempo, **t**, que invierte el Lobo.



Entonces, si el segmento AC representa el tiempo de Caperucita en llegar a la casa, el segmento AB representará el tiempo que tarda el lobo en hacer el mismo recorrido y, el BC el tiempo (1/2 h) que le falta a Caperucita para llegar a la casa en el instante en el que llega el Lobo. De lo que se deduce:

$\frac{1}{2} = 2 \times t$ de donde $t = \frac{1}{4}$ de hora, y dado que el Lobo va a12 km/h, la distancia a la casa es igual a $\frac{12\ km}{h} \times \frac{1}{4} h = 3\ km.$.

13.(D) En un puñado de arroz habrá $2 \times 7 \times 100 = 1400$ granos de arroz. Puesto que para 8 personas se necesitan $2 \times 8 + 1 = 17$ puñados de arroz y, para la paella se necesitarán $17 \times 1400 = 23\,800$ granos. El número que mejor aproxima los granos de la paella es 25 000.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

14.(E) Las cuatro esquinas equivalen a un cuadrado gris. Los cuatro triángulos laterales tienen la misma área que 2 cuadrados grises.
En el azulejo tendremos en total 5 + 2 + 1 = 8 cuadrados grises. Dado que el azulejo está teselado en 36 cuadraditos y cada cuadrado gris equivale a 2 cuadraditos de la tesela, los 8 cuadrados grises equivalen 8 × 2 = 16 cuadraditos. Entonces la fracción gris del mosaico es $\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$.

15.(E) Si 48 castañas cuestan lo mismo que 10 barquillos, 24 castañas costarán lo mismo que 5 barquillos y 48 + 24 = 72 castañas costarán igual que 10 + 5 = 15 barquillos. Por otra parte, como 4 viajes de tiovivo cuestan también 15 barquillos, tenemos que 4 viajes valen lo mismo que 72 castañas.
Por lo tanto un viaje de tiovivo cuesta 72 ÷ 4 = 18castañas.

16.(E) Cómo 5 monedas de 20 céntimos valen 1€, 725 monedas de 20 céntimos valdrán 725 ÷ 5 = 145 €. Por lo que me tendrán que dar 164 – 145 = 19 € en monedas de 2 céntimos. Dado que 1€ es igual 100 céntimos, 1€ vale lo mismo que 50 monedas de 2 céntimos y, por tanto, me darán 19 × 50 = 950 monedas de 2 céntimos.

17.(A) Al obtener el perímetro del hexágono exterior hemos sumado 3 veces el lado largo y 3 veces el corto. Por otra parte, para obtener el perímetro del triángulo sumamos 3 veces el lado largo y restamos 3 veces el lado corto. En consecuencia, la suma de los dos perímetros es igual a 6 veces el lado largo.Tendremos entonces: 75 + 21 = 6 veces el lado largo, lo que implica que el lado largo mide $\frac{75+21}{6}=\frac{96}{6}=16$ cm.

18.(B) Basta expresar matemáticamente el enunciado del problema:
$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{5}\times(120\times 6)=\frac{2\times 120\times 6}{4\times 3\times 5}=24.$$
O empezando por el final: $\{[(120\times 6\div 5)\times 2]\div 3\}\div 4=24$.

19.(C) En la figura contamos 13 polígonos de los que 9 son pentágonos. Dado que a cada pentágono deberemos unir cuatro hexágonos, habrá que añadir 4 × 9 = 36 hexágonos, lo que permite construir la tabla siguiente:

	Nº de polígonos	Nº de vértices
Triángulos	1	3
Cuadrados	3	12
Pentágonos	9	45
Hexágonos	36	216

Lo que nos lleva a 3 + 12 + 45 + 216 = 276 luces.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

20.(C) Si construimos una tabla con las pulsaciones y las marcaciones, la solución es inmediata:

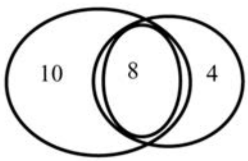
Pulso	**0**	1	2	3	4	**5**	6	7	8	**9**
Marca	**1**	4	3	2	5	**0**	7	8	9	**6**

Por lo tanto, si quiero marcar el 016 debo pulsar el 509.

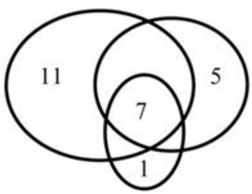
21.(D) Cómo mcd(45, 27,36) = 9, la cantidad mayor posible de cofres con el mismo contenido es 9, teniendo en cada uno de ellos:
$45 \div 9 = 5$ caracolas, $27 \div 9 = 3$ perlas y $36 \div 9$ 4 monedas de oro.
Por lo que en cada cofre habrá $5 + 3 + 4 = 12$ objetos.

22.(A) Entre los primeros 100 números encontramos un 8 en cada decena excepto en la de los 80, en la que hay 11ochos, es decir, del 1 al 100 se comió $9 + 11 = 20$ ochos. El esquema se repite para los números que van del 101 al 200 y se come otros 20 ochos. Del 201 al 300 se comería otros 20, pero como solo llegamos al 288, deja de comerse los ochos del 289 y del 298. Concluimos que Comenúmeros se comió $20 + 20 + 8 = 48$ ochos.

23.(D) $24 \div 2 = 12$ alumnos saben qué es una pirámide truncada, $\frac{3}{4} \times 24 = 18$ saben qué es un trapecio isósceles y $24 \div 3 = 8$ conocen la apotema. Parece ser que 8 es el máximo número posible de los que saben las tres cosas.
Pero como $(18 - 8) + 8 + (12 - 8) = 10 + 8 + 4 = 22$ y en la clase hay 24 alumnos eso no es posible.



En cambio 7 sí es posible ya que $(18 - 7) + (7 + 1) + (12 - 7) = 11 + 8 + 5 = 24$



XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

24.(D) Teniendo en cuenta que al menos hay una araña y una avispa, deducimos que el máximo número posible de patas de escolopendra es $196 - (8 + 6) = 182$.
Luego el máximo número posible de escolopendras es 3, ya que $182 \div 46 \cong 3{,}95$.
Además, como hay el doble de arañas que escolopendras y tenemos en total 18 bichos, las posibilidades se limitan a las tres mostradas en la siguiente tabla:

Escolopendras	1	2	3
Arañas	2	4	6
Avispas	15	**12**	9
Total de bichos	18	18	18
Total de patas	152	**196**	240

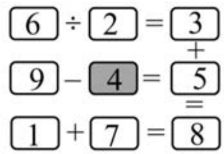
Sumando ahora el número de patas, vemos enseguida que:
$2 \times 46 + 4 \times 8 + 12 \times 6 = 196$. Por tanto hay 12 avispas.

25.(D) Descartamos 696 y 996 por ser ambos divisibles por 4 ($96 \div 4 = 24$).
El 666 se descarta por ser múltiplo de 9 ($6 + 6 + 6 = 18 = 9 \times 2$).
Rechazamos el 999 por ser múltiplo de 9 ($111 \times 9 = 999$).
Por lo tanto 996 es el número buscado.
No obstante, para quedarnos tranquilos podemos comprobar que cumple las condiciones de Don retorcido:
Es múltiplo de 6 (es par y $9 + 6 + 6 = 21$ múltiplo de 3 pero no de 9) y es divisible entre 7 ($966 \div 7 = 138$) pero no lo es entre 4 ($66 \div 4 = 16{,}5$).

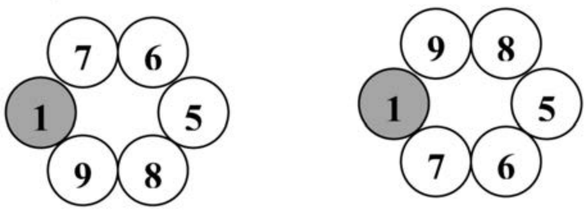
XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 2ª Fase Nivel II

1. (A) La fila superior no tiene otra manera de rellenarse que con un 6 y un 2: 6 ÷ 2 = 3.
De esta manera nos quedan por colocar el 1, 4, 5, 7, 8 y 9. Al observar la última columna y la última fila, como ambas operaciones son sumas, debemos buscar, entre los números que quedan por colocar, cuatro números tal que uno de ellos más 3 nos dé lo mismo que la suma de los otros dos: 3 + 5 = 1 + 7 = 8.
Así que bajo el 3 va un 5 y la fila de en medio es: 9 – 4 = 5.
El número que ocupa la casulla sombreada es el 4.



2. (E) Alrededor de 5 solo podemos colocar el 6 y el 8. (5 + 6 = 11 y 5 + 8 = 13)
Al lado de 6 solo podemos colocar el 7 y al lado de 7 el 10.
Al lado del 8 solo podemos colocar el 9 y al lado del 9 el 10.
En el círculo gris va el 10.



3. (C) 555? NUEVE posibles cifras en las unidades: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
55?5 NUEVE posibles cifras en las decenas: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
5?55 NUEVE posibles cifras en las centenas: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
?555 OCHO posibles cifras (el 0 no está permitido) en las unidades de mil: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
Tenemos 9 + 9 + 9 + 8 = 35 números.

4. (B) Descomponemos en factores primos cada número:
2, **3**, 4 = **2·2**, 15 = **3·5**, 28 = **2·2·7**, 35 = **5·7**, 50 = **2·5·5**.
Observamos que hay 6 doses, 2 treses, 4 cincos y 2 sietes. Así que cada uno tiene 3 doses, 1 tres, 2 cincos y 1 siete y el reparto de números tiene que ser [2, 4, 15, 35] y [3, 28, 50].
Como se han encontrado 7 números, el que elige primero se lleva 4, así que la niña Centésima se llevo el 2, el 4, el 15 y el 35.
Sus números suman 2 + 4 + 15 + 35 = 56.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

5. (A) Si llamamos E al precio original de cada entrada podemos asegurar que lo que paga cada amigo por una entrada es:
Antía paga $0{,}85\cdot E$ (al descontarle el 15%, paga el 85% de una entrada).
Roger paga $0{,}90\cdot E$ (al descontarle el 10%, paga el 90% de una entrada).
Fernando paga $0{,}95\cdot E$ (al descontarle el 5%, paga el 95% de una entrada).
Gracias a los descuentos, en lugar de pagar $3\cdot E$, entre los tres, pagan
$0{,}85\cdot E + 0{,}90\cdot E + 0{,}95\cdot E = 2{,}70\cdot E$.
Como han pagado 351€, vemos que $2{,}70\cdot E = 351$, y ya podemos calcular el precio de la entrada original, $E = 351:2{,}70 = 130$ euros.

6. (A) Como $\frac{33}{29} = 33:29$ cabe a 1, entonces $a = 1$. $\frac{33}{29} - 1 = \frac{4}{29} \Rightarrow \frac{1}{b+\frac{1}{c}} \Rightarrow \frac{29}{4} = b + \frac{1}{c}$

Análogamente, como 29 entre 4 cabe a 7, entonces $b = 7$. $\frac{29}{4} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow c = 4$

Así que $a + b + c = 12$.
Otra forma de hacerlo.

$$\frac{33}{29} = a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}} = a + \frac{c}{bc+1} = \frac{a(bc+1)+c}{bc+1} \Rightarrow \begin{cases} bc+1 = 29 \\ 29a + c = 33 \end{cases}$$

Como los números a, b, c, son enteros positivos, entonces de $29a + c = 33$ se deduce que $a = 1$ y $c = 4$. Y de $bc + 1 = 29$, es decir, de $4b + 1 = 29$ se deduce que $b = 7$.

7. (A) Escribimos cada apartado en base 2:

A) $2^{3^8} = 2^{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3} = 2^{9\cdot9\cdot9\cdot9}$

B) $(2^3)^8 = 2^{3\cdot8}$

C) $(2^9)^3 = 2^{9\cdot3}$

D) $2^{9^3} = 2^{9\cdot9\cdot9}$ $2^{9^3} = 2^{9\cdot9\cdot9}$

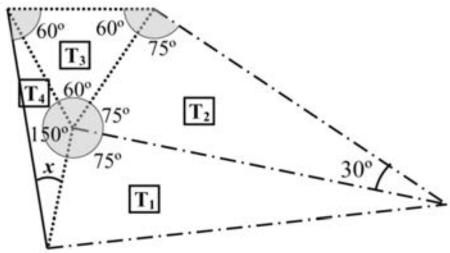
Observamos que el mayor exponente es el del apartado A), por lo que el mayor número es $2^{3^{(2^3)}}$.

8. (B) $20 - 5 = 15$, por lo que Berta tiene 5 hijas y 15 nietas.
$15 \div 5 = 3$, por lo que 3 hijas tienen hijas y 2 hijas no tienen hijas.
Como no tiene bisnietas, ninguna nieta tiene hijas, por lo que el número de hijas y nietas sin hijas es $2 + 15 = 17$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

9. (D) Cada equipo se enfrenta a 5 equipos, $6 \cdot 5 = 30$, pero como solo juegan un partido entre equipos iguales, el número de partidos disputados es $30 \div 2 = 15$.
Si todos los partidos hubieran acabado con victoria (3 puntos) se habrían conseguido 45 puntos. Fíjate que por cada partido empatado se reparten 2 puntos (1 punto para cada equipo), es decir, se pierde 1 punto (2 puntos frente a 3).
Como en total se consiguieron 40 puntos de los 45 máximos posible, se perdieron 5 puntos, es decir hubo 5 empates y 40 victorias.

10.(C) El triángulo T1 es isósceles, sus ángulos iguales miden $(180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ$.
Los triángulos T1 y T2 son iguales.
El triángulo T3 es equilátero, por lo que sus ángulos miden 60º cada uno.
El triángulo T4 es isósceles y el ángulo desigual mide $360^\circ - (60^\circ + 75^\circ + 75^\circ) = 150^\circ$.
Por ello, el ángulo x mide $(180^\circ - 150^\circ) \div 2 = 15^\circ$.



11.(C) Las 21 combinaciones posibles son (¡no pierdas ninguna!, ¡lleva un orden!):

Empezando con S:			Empezando con E:	Empezando con I:
SSSS	SESS	SISS	ESSS	ISSS
SSSE	SESE	SISE	ESSE	ISSE
SSSI	SESI	SISI	ESSI	ISSI
SSES			ESES	ISES
SSIS			ESIS	ISIS

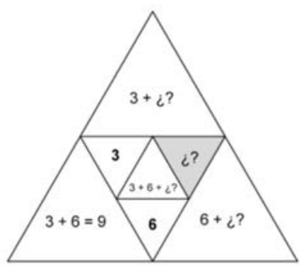
12.(B) Como el triángulo coloreado (¿?) es suma de sus triángulos vecinos, tenemos que:

¿? = (3 + 6 + ¿?) + (6 + ¿?) + (3 + ¿?)

¿? = 18 + ¿? + ¿? + ¿?

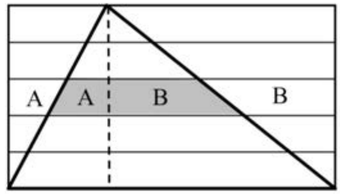
¿? = –9

Las regiones de Comenúmeros, las tres más grandes, son, por tanto, –6, 9 y –3.
Su suma es 0.



XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

13.(D) Dividimos el trapecio sombreado en dos partes y . Observamos que las partes A y B aparecen dos veces en su franja, por lo que el área del trapecio sombreado es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{5}$ del área del rectángulo, es decir, $\frac{1}{10}$ del área del rectángulo.



Como el área del rectángulo es el doble de la del triángulo: $S_R = 2 \cdot S_T$. Así que:

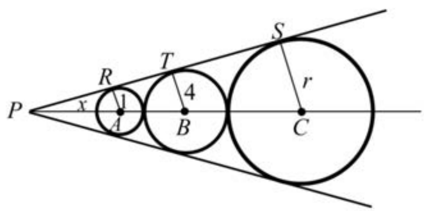
Trapecio Sombreado = $\frac{1}{10}$ del Rectángulo = $\frac{1}{10} \cdot 2 \cdot$Triángulo = $\frac{1}{5}$ del Triángulo.

14.(E) Los números x cumplen que $-5 \le 2x - 1 \le 7$.
Si sumamos 1 a cada término, las desigualdades se mantienen y vemos que:

$$-5 + 1 \le 2x - 1 + 1 \le 7 + 1 \Leftrightarrow -4 \le 2x \le 8$$

Si dividimos los términos entre 2 (¡¡positivo!!), las desigualdades siguen conservándose y obtenemos: $-2 \le x \le 4$.
El mayor valor posible de x es 4, el menor es –2, y su diferencia es $4 - (-2) = 6$.

15.(E) Como en tantísimos problemas de geometría, añadiendo algunas líneas vemos la estructura escondida que nos ayuda a resolverlo. Sabemos que las tangentes a las circunferencias son perpendiculares a los radios que llegan a los puntos de tangencia, por tanto, los triángulos *PAR*, *PBT* y *PCS* son semejantes. Jugando con esta propiedad, calcularemos primero la longitud x de *PA* y luego el radio r del sombrero mayor.



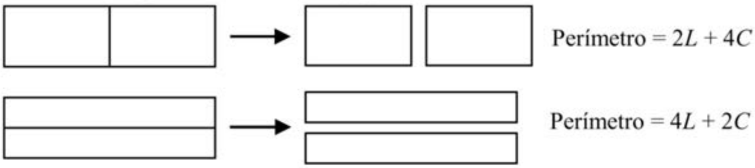
PAR y *PBT* semejantes: $\frac{AR}{BT} = \frac{PA}{PB} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1+x}{6+x} \rightarrow x = \frac{2}{3}$

PAR y *PCS* semejantes: $\frac{AR}{CS} = \frac{PA}{PC} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1+\frac{2}{3}}{r+10+\frac{2}{3}} \rightarrow r = 16$

El radio del sombrero grande mide 16 cm.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

16.(A) Si llamamos L a la longitud, en cm, del lado largo y C a la del corto del rectángulo de partida, nos encontramos con estas dos situaciones del dibujo. Hay que tener mucho cuidado al calcular los perímetros de los dos rectángulos que se forman en cada caso porque el lado común hay que sumarlo dos veces.



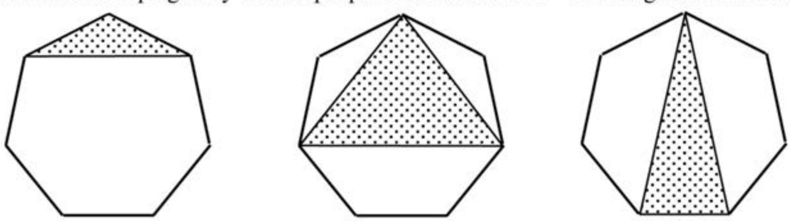
Si no tocamos la primera igualdad y dividimos entre dos la segunda igualdad tenemos:

$2L + 4C = 96$
$2L + \ \ C = 42$

Si las restamos vemos que $3C = 54$, es decir $C = 18$ cm.
Y el otro lado cumpliría que $2L + 18 = 42$, es decir, $L = 12$ cm.
El perímetro del rectángulo de partida es $2\cdot(18 + 12) = 60$ cm.

NOTA: como muy bien observaron algunos estudiantes, hay algo equivocado en el enunciado porque la longitud del lado corto no puede ser mayor que la del lado largo. **En el enunciado hay que intercambiar el 84 por el 96**. Aunque el perímetro sigue siendo 60 cm hay un evidente error en el enunciado.
Desde aquí, ofrecemos disculpas por el lapsus y agradecimientos por el aviso.

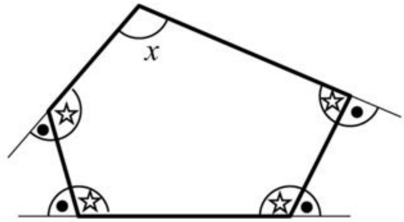
17.(D) Si fijamos el vértice superior, por ejemplo, vemos que podemos formar tres triángulos isósceles. Esta misma operación la hacemos en cada uno de los 7 vértices del heptágono y vemos que podemos formar $7\cdot 3 = 21$ triángulos isósceles.



En este tipo de problemas es importante no caer en el error de contar dos veces la misma configuración, en este caso, no contar dos veces el mismo triángulo.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

18.(C) Como los ángulos marcados con un puntito suman 336º, entonces, los ángulos de la estrellita (los suplementarios de los puntitos) suman $4 \cdot 180^\circ - 336^\circ = 384^\circ$.
Los ángulos de un pentágono suman 540º, por lo que nuestro ángulo buscado mide $x = 540^\circ - 384^\circ = 156^\circ$.



19.(B) Los restos se repiten por ciclos en las columnas: en la columna del 1 son todo 0–0–0 etc; en la columna del 2 el ciclo es 10–10–etc; en la del 3 es 201–201–etc; en la del 4 es 3012–3012–etc; en la del 5 es 12340 y en la del 6 es 501234. El problema se reduce a saber cuántos ciclos completos hay en cada columna y luego sumar.

	1	2	3	4	5	6
11	**0**	**1**	**2**	**3**	**1**	**5**
12	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**
13	**0**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**
14	**0**	**0**	**2**	**2**	**4**	**2**
15	**0**	**1**	**0**	**3**	**0**	**3**
...	...	...	...	...	...	...
60	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Observa que la tabla tiene 50 filas.

Columna del 2 ($50 = 25 \cdot 2$): 25 ciclos completos de 01. La suma es 25.

Columna del 3 ($50 = 16 \cdot 3+2$): 16 ciclos completos de 201, más un 2 y un 0. La suma es $16 \cdot (2+0+1)+2+0 = 50$.

Columna del 4 ($50 = 12 \cdot 4+2$): 12 ciclos completos de 3012, más un 3 y un 0. La suma es $12 \cdot (3+0+1+2)+3+0 = 75$.

Columna del 5 ($50 = 10 \cdot 5$): 10 ciclos completos de 12340. La suma es $10 \cdot (1+2+3+4+0) = 100$.

Columna del 6 ($50 = 8 \cdot 6+2$): 8 ciclos completos de 501234, más un 5 y un 0. La suma es $8 \cdot (5+0+1+2+3+4)+5+0 = 125$.

La suma total es $25+50+75+100+125 = 375$.

20.(B) Vamos a llamar x a los triples que intentó Irene y entonces $30-x$ son los dobles que lanzó. Según los datos del problema, los puntos conseguidos por Irene fueron el $3 \cdot [20\%$ de $x]$ más $2 \cdot [30\%$ de $(30-x)]$, es decir:

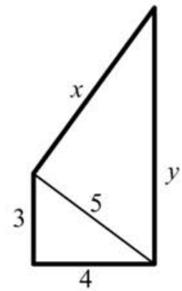
$$3 \cdot \frac{20}{100} \cdot x + 2 \cdot \frac{30}{100} \cdot (30 - x) = \frac{60x + 1800 - 60x}{100} = 18$$

Irene consiguió 18 puntos en ese partido.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

21.(A) La hipotenusa del triángulo pequeño mide… ¡5cm! (que es también el cateto pequeño del triángulo grande)

La razón de semejanza del triángulo grande y el pequeño es la razón entre dos lados homólogos, por ejemplo, la razón entre sus catetos pequeños: $\frac{5}{3}$.



Por tanto, el perímetro del triángulo grande será la del pequeño multiplicada por la razón de semejanza, $PG = \frac{5}{3}(3+4+5) = 20$, por lo que $x + y = 20 - 5 = 15$

El perímetro del trapecio mide 3 + 4 + 15 = 22 cm.

22.(C) Al principio Rosalía tenía B rosas blancas lo que supone un porcentaje de $\frac{100 \cdot B}{480}$.

Si añadimos 60 nuevas rosas blancas, el porcentaje es ahora $\frac{100 \cdot (B+60)}{540}$ y como este nuevo porcentaje es doble que el inicial podemos escribir que:

$$\frac{100 \cdot (B+60)}{540} = \frac{2 \cdot 100 \cdot B}{480} \rightarrow \frac{B+60}{540} = \frac{2 \cdot B}{480} \rightarrow 480 \cdot (B+60) = 2 \cdot 540 \cdot B$$

Podemos calcular B muy fácilmente, dividiendo la última igualdad entre 120: $4 \cdot (B+60) = 9 \cdot B \rightarrow 4B + 240 = 9B \rightarrow B = 48$.

Rosalía tiene ahora 48 + 60 = 108 rosas blancas (sus cifras suman 9).

23.(D) Para que un múltiplo de 19, $19 \cdot n$, acabe en 7, n tiene que terminar en 3. Así que vamos a multiplicar 19 por 3, por 13, por 23,… hasta que el resultado acabe en 17:

$19 \cdot 3 = 57$ no vale	$19 \cdot 13 = 247$ no vale	$19 \cdot 23 = 437$ no vale
$19 \cdot 33 = 627$ no vale	$19 \cdot 43 = 817$ sí vale	

El menor múltiplo de 19 que acaba en 17 empieza por 8.

24.(B) Debemos encontrar un número n que cumpla que $\frac{3+n}{7+n} = \frac{3}{5}$, es decir, que

$5 \cdot (3+n) = 3 \cdot (7+n) \rightarrow 15 + 5n = 21 + 3n \rightarrow 2n = 6 \rightarrow n = 3$.

Nunca está de más comprobar si lo hemos hecho bien: $\frac{3+3}{7+3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

25.(C) La única manera de que Joaquín esté seguro de que los números de María suman par es que Joaquín haya cogido los tres números pares que hay. De esta manera, en la caja solo quedan números impares y Joaquín sabe muy bien que si sumas dos números impares, a la fuerza, el resultado te dará par.

Por esto, Joaquín ha cogido el 188, el 234 y el 318, cuya suma es 740.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (A) Si $a = 1 + b$, entonces $a + b = 1 + b + b = 1 + 2b$. Por tanto, el cociente vale 1.

2. (C) Si llamamos x a la capacidad de la piscina de Cati, la capacidad de la piscina de Sara se puede expresar como $1{,}15x$, y la capacidad de la piscina de Julia es $1{,}25x$. Por tanto, el cociente entre las capacidades de las piscinas de Sara y de Julia es $\frac{1{,}15x}{1{,}25x} = 0{,}92$, lo cual indica que la de Sara tiene un 8% menos que la de Julia.

3. (D) Podemos simplificar la expresión para la cual buscamos el valor máximo: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$; dado que $a < 0$ y $b > 0$, el cociente $\frac{b}{a} < 0$, y el valor máximo de la expresión dada se obtendrá cuando el cociente esté más cerca del 0. Para ello tendremos que coger $b = 2$, y $a = -4$ y obtendremos $\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$.

4. (B) La diferencia que nos piden entre las áreas de las dos partes de la pajarita coincide con la diferencia entre las áreas de los triángulos ABC y ABD, que podremos calcular con los datos que nos piden. El área del triángulo ABC es $\frac{4 \cdot 8}{2} = 16$, y el área del triángulo ABD es $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$. Por tanto, la diferencia buscada es igual a 4.

5. (A) Llamamos x a la longitud, en kilómetros, del recorrido total. África tarda $\frac{x}{20}$ horas en recorrerlo completo. Blanca tarda $\frac{\frac{x}{2}}{10} = \frac{x}{20}$ horas en recorrer la primera mitad, y $\frac{\frac{x}{2}}{30} = \frac{x}{60}$ horas en recorrer la segunda mitad, con lo que en total tarda $\frac{x}{20} + \frac{x}{60} = \frac{4x}{60} = \frac{x}{15}$ horas, que es más de lo que tarda África. Carlos, por su parte, tarda $\frac{\frac{3x}{4}}{30} = \frac{x}{40}$ horas en hacer tres cuartas partes del recorrido, y $\frac{\frac{x}{4}}{5} = \frac{x}{20}$ en hacer el resto, es decir, en total tarda $\frac{x}{40}+\frac{x}{20}=\frac{3x}{40}$ horas, que es más de lo que tardan Blanca y África. Por tanto, África es quien menos tiempo tarda en hacer el recorrido.

6. (A) Operando en las dos igualdades se obtiene:
$xy + 2x + 2y + 4 = 60$ y $xy + 3x + 3y + 9 = 40$.
Restando la segunda ecuación menos la primera, llegamos a que $x + y + 5 = -20$, es decir $x + y = -25$.
Por último, manipulando la expresión que nos piden, obtenemos:
$(x + 5) \cdot (y + 5) = xy + 5x + 5y + 25 = xy + 2x + 2y + 4 + 3(x + y) + 21 =$

$= 60 + 3(-2\ 5) + 21 = 6.$

7. (D) Si llamamos x al número de rotuladores que he comprado, y al número de agendas, y z al número de gomas, tendremos que $\begin{cases} x+y+z=100 \\ x+10y+\frac{1}{8}z=100 \end{cases}$

Vemos que tenemos 3 incógnitas pero solo dos ecuaciones. Si las manipulamos hábilmente podremos quedarnos con una sola ecuación con dos incógnitas. Lo que tenemos que hacer es, por ejemplo, multiplicar por 8 la segunda ecuación, y al resultado restarle la primera ecuación. Así obtenemos $7x + 79y = 700$. Y ahora, despejando x, que es la incógnita que me interesa sacar, obtenemos $x=100-\frac{79}{7}y$.

Tenemos que darnos cuenta de que, como cada agenda cuesta 10 euros, sabemos que he comprado un número entero y de agendas menor que 10, por tanto, la única solución para que x sea un número entero es tener $y = 7$, en cuyo caso me queda $x = 100 - 79 = 21$..

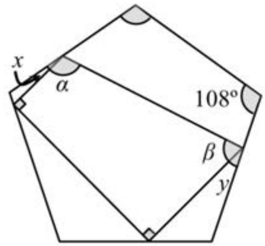
8. (C) Examinando ingrediente a ingrediente, dividiendo la cantidad que tengo entre la que necesito, vemos que 4 yogures me darían para 4 bizcochos, 5 huevos me darían para $\frac{5}{3}$ de bizcocho, 6 tazas de harina me daría para 2 bizcochos, 3 tazas de azúcar me daría para $\frac{3}{2}$ de bizcocho, $\frac{3}{4}$ de tazas de aceite me daría para $\frac{3}{2}$ de bizcocho y 5 cucharaditas de levadura me daría para $\frac{5}{2}$ de bizcocho. La menor de estas cantidades es $\frac{3}{2}$ de bizcocho, y con eso podré invitar a 12 amigos, ya que cada bizcocho se lo comen 8 personas.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

9. (B) Contemos primero los casos posibles. Como no importa el orden en el que elija los puntos, tengo que contar los grupos de 3 elementos que puedo hacer con un total de 9 elementos.

Esto me lo da el número combinatorio $\binom{9}{2} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 84.$

De entre todos los casos posibles, hay 3 rectas horizontales que contienen 3 puntos cada una, 3 rectas verticales y 2 diagonales, es decir, tenemos 8 casos favorables. Por tanto, la probabilidad de que los tres puntos elegidos estén alineados es $\dfrac{8}{84} = \dfrac{2}{21}$.



10.(C) Recordemos primero que el ángulo central de un pentágono regular es 360º : 5 = 72º, por tanto, el ángulo interno es 180º – 72º = 108º. Recordemos también que todos los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360º. Llamemos α al ángulo interno del trapecio adyacente a x, y sea β el ángulo interno del trapecio adyacente a y. Como el trapecio es rectángulo, sabemos que $\alpha + \beta = 180º$.

Fijémonos ahora en el cuadrilátero de la esquina superior derecha. Dos de sus ángulos miden 108º, y los otros dos son los suplementarios de $x + \alpha$ y de $y + \beta$ respectivamente, así pues, como sus ángulos suman 360º, tenemos:

$180º - \alpha - x + 180º - \beta - y + 2 \cdot 180º = 360º$, de donde podemos despejar $x + y$.

$x + y = 2 \cdot 180º - (\alpha + \beta) = 36º$.

11.(D) Tenemos que darnos cuenta de que la potencia será igual a 1 cuando ocurra alguna de las tres posibilidades siguientes:

a) Cuando el exponente sea igual a 0. En este caso buscamos las soluciones de la ecuación $3x^2 + 7x - 6 = 0$ y obtenemos que y las soluciones son $\dfrac{2}{3}$ y (-3) .

b) Cuando la base sea igual a 1. En este caso buscamos las soluciones de la ecuación $x^2 - 2 = 1$ y obtenemos que $\sqrt{3}$ y $(-\sqrt{3})$ también son soluciones.

c) Cuando la base sea igual a (-1) y el exponente sea un múltiplo de 2. Por un lado, resolvemos la ecuación $x^2 - 2 = -1$, cuyas soluciones son 1 y (-1).

Cuando $x = 1$, el polinomio $3x^2 + 7x - 6$ vale 4 y cuando $x = -1$, el polinomio $3x^2 + 7x - 6$ vale -10. En los dos casos obtenemos soluciones.

Así pues, el producto de todas las soluciones es $\dfrac{2}{3} \cdot (-3) \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\sqrt{3}\right) \cdot 1 \cdot (-1) = -6$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

12.(B) Al colocar un cuadrado sobre uno de los lados de un triángulo, obtenemos un polígono con 5 lados. Al añadir un pentágono, conseguimos un polígono de 8 lados. Así, vemos que cuando añadimos un polígono de n lados al anterior con k lados, el resultado es un polígono de $n + k - 2$ lados. La sucesión que tenemos es:

$3 + 4 - 2 = 5$, $5 + 5 - 2 = 8$, $8 + 6 - 2 = 12$, $12 + 7 - 2 = 17$
$17 + 8 - 2 = 23$ $23 + 9 - 2 = 30$ $30 + 10 - 2 = 38$

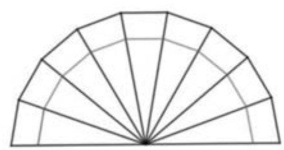
O de otra forma, lo que tenemos que calcular es:

$$3+\sum_{4}^{10}(n-2)=3+2+3+4+5+6+7+8=38$$

13.(C) Lo primero que necesitamos hacer es contar cuántos partidos hubo. Hay 20 posibles equipos que juegan en casa, y para cada uno de ellos habrá 19 posibles contrincantes a los que les tocará jugar fuera. Esto hace un total de $20 \cdot 19 = 380$ partidos. Si ninguno de estos partidos hubiese acabado en empate, habrían sumado $380 \cdot 3 = 1140$ puntos, ya que por cada victoria, un equipo suma 3 puntos. Pero como han sumado 1005 puntos, esto quiere decir que $1140 - 1005 = 135$ puntos son los que han dejado de sumar por las victorias, y ya que por cada empate, se suman 2 puntos en total (uno para cada equipo), esto implica que ha habido 135 empates (y 245 victorias).

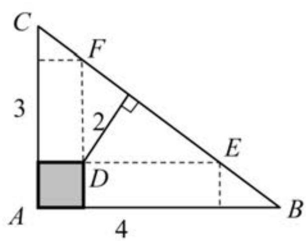
14.(A) Solo hay dos afirmaciones falsas y un único culpable. Puesto que hay tres acusaciones directas, una de ellas ha de ser verdadera y las otras dos falsas. Además, el resto de afirmaciones también serán verdaderas, por tanto sabemos que Ana y Cris mienten. Esto implica que no lo hicieron ni Berto ni Dani, por tanto la culpable es Ana.

15.(A) Si prolongamos los lados no paralelos de los trapecios hacia dentro del arco, tendremos 9 triángulos isósceles iguales y todos ellos comparten un vértice que está en el centro del arco. Habremos dividido así media circunferencia en 9 partes iguales, por tanto, el ángulo desigual de estos triángulos vale 180º : 9 = 20º. A partir de aquí llegamos a que los ángulos iguales de dichos triángulos, que coinciden con los ángulos interiores más pequeños de cada trapecio, valen $\dfrac{180^{\circ}-20^{\circ}}{2}=80^{\circ}$. Y por consiguiente, los ángulos interiores más grandes del trapecio, que son sus suplementarios, valen 180º – 80º = 100º.



XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

16.(E) Si prolongamos los lados del cuadrado según se muestra en la figura, y trazamos una perpendicular al lado *AB* que pase por *E*, obtenemos dos triángulos semejantes al original, el triángulo *DEF* y el triángulo *GBE*.
En el triángulo original *ABC*, usando el teorema de Pitágoras y el teorema de la altura, como conocemos los catetos, que miden 3 y 4, podemos obtener que la hipotenusa mide 5 y que la altura mide $\frac{12}{5}$.
En el triángulo *DEF*, sabemos que la altura mide 2, y por semejanza con *ABC*, podemos obtener que el cateto mayor, *DE*, mide $\frac{10}{3}$.
Si llamamos x al lado del cuadrado, éste coincide con *EG*, el cateto menor del triángulo *GBE*. Usando nuevamente la semejanza podemos obtener que el cateto mayor de este triángulo es $\frac{4}{3}x$. Así obtenemos que la base *AB*, que mide 4, tiene que ser igual a $x+\frac{10}{3}+\frac{4}{3}x$, y despejando x en esta ecuación obtenemos que el lado del cuadrado mide $\frac{2}{7}$, por tanto el área total que ocupa el cuadrado es $\frac{4}{49}$.



17.(B) La probabilidad que nos piden se calculará sumando la probabilidad de que ambos obtengan 0 caras, más la probabilidad de que ambos obtengan 1 cara, más la probabilidad de que ambos obtengan 2 caras. Como el lanzamiento de Julián es independiente del lanzamiento de Lucía, cada una de estas probabilidades se calcula multiplicando. Si L es el número de caras de Lucía y J el número de caras de Julián, $p(L=0)\cdot p(J=0)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$; $p(L=1)\cdot p(J=1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{4}=\frac{6}{32}$

$p(L=2)\cdot p(J=2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$

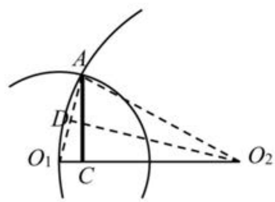
Así pues, la probabilidad que nos piden es $\frac{1}{32}+\frac{6}{32}+\frac{3}{32}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

18.(B) El número de apretones de manos que se dieron los mellizos entre sí fue $\frac{18\cdot 16}{2}=144$. El número de apretones de manos que se dieron los trillizos entre sí fue $\frac{18\cdot 15}{2}=135$. Y finalmente, el número de apretones de manos que se dieron los mellizos con los trillizos fue $\frac{18\cdot 18}{2}=162$. Si sumamos obtenemos un total de $144 + 135 + 162 = 441$ apretones de manos.

19.(E) En la ecuación que nos dan, despejando a obtenemos que $a=\frac{9b^2}{5-b}$ y de aquí podemos extraer dos conclusiones.
Por una parte, ya que a es un número entero positivo, y el numerador es siempre positivo, también ha de serlo el denominador $0 < 5 - b$, por tanto $b < 5$. Y como b también es un entero positivo solo puede tomar los valores 1, 2, 3, o 4.
Por otra parte, $(5 - b)$ tiene que ser un divisor de $9b^2$. Como hemos reducido a cuatro los posibles valores de b, podemos probar y vemos que los únicos que cumplen esta última propiedad son $b = 2$ y $b = 4$, que me dan, respectivamente, $a = 12$ y $a = 144$. En conclusión, la suma de todos los valores posibles de a es 156.

20.(C) Si llamamos C al punto donde el segmento AB corta a la recta que une los centros de la circunferencia, vemos que lo que necesito es saber cuánto mide AC, que es la altura del triángulo O_1O_2A. Si supiésemos el área de este triángulo, podríamos calcular fácilmente dicha altura, ya que la distancia entre los centros sabemos que es 2.



Para calcular el área del triángulo O_1O_2A, tomaremos el lado AO_1 como base y buscaremos la longitud de la altura DO_2. Puesto que el triángulo es isósceles, la altura DO_2 corta en el punto medio al lado AO_1, por tanto tenemos un triángulo rectángulo ADO_2 del cual conocemos la hipotenusa, que mide 2, y el cateto menor que mide $\frac{1}{2}$, y por tanto el otro cateto $DO_2=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$. Llegamos así a que el área del triángulo O_1O_2A es $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot AC$, y de ahí obtenemos que $AC=\frac{\sqrt{15}}{4}$ y por tanto la distancia que se pedía es el doble.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

21.(A) Buscamos las soluciones enteras de la ecuación $n^2+6n+24-q^2=0$, donde q es un número entero. El discriminante es $\Delta=36-4(24-q^2)=4q^2-60=4(q^2-15)$, y para que las soluciones sean enteras, Δ tiene que ser un cuadrado perfecto, de donde llegamos a que $q^2-15=r^2$, con r un número entero. Es decir, tenemos $q^2-r^2=(q+r)\cdot(q-r)=15$.

Pero el número 15 solo podemos descomponerlo de dos formas distintas, $15\cdot 1$ y $5\cdot 3$, y de aquí llegamos a los posibles valores de q y r. O bien $q=4$ y $r=\pm 1$, o bien $q=8$ y $r=\pm 7$.. De aquí obtenemos que los valores de n posibles son –2, –4, 4 y 10, y su suma vale –12.

22.(E) Teniendo en cuenta que las respuestas posibles están entre el 99! y el 104! vamos a contar, por ejemplo, cuántas veces aparece el factor 2 en el número factorial 100! Por una parte tenemos 50 múltiplos de 2 menores o iguales que 100. De ellos, 25 son además múltiplos de 4, y por tanto, aportan dos veces el factor 2 al factorial. Necesitamos contar también cuántos múltiplos hay de cada potencia de 2 menor que100. Tenemos 12 múltiplos de 8, 6 múltiplos de 16, 3 múltiplos de 32 y 1 múltiplo de 64.

En total el factor 2 en el factorial 100! aparece $50+25+12+6+3+1=97$ veces. Si consideramos el 102! tendremos que añadir los doses que aporta $102=2\cdot 51$, y llegamos a que el factor 2 aparece 98 veces en 102!. No es suficiente. La respuesta es 104! ya que aquí habremos añadido el factor $104=2^2\cdot 13$, y por tanto será divisible entre 2^{100}.

23.(A) Según el enunciado del problema, cada piso tendrá una naranja menos tanto a lo largo como a lo ancho. Es decir, si el primer piso es 5×8, el siguiente piso es 4×7, así el tercer piso es 3×6, el cuarto piso es 2×5 y llegamos al último piso que es 1×4, una única fila.

Por tanto, cada pirámide del frutero tiene: $40+28+18+10+4=100$ naranjas.

24.(E) Contemos primero cuántos números de seis cifras hay que contienen los dígitos dados. Como el dígito más a la izquierda no puede ser 0, tenemos para dicho dígito cinco posibilidades. Una vez fijado dicho dígito, no tenemos restricciones sobre los demás, así que tendremos que contar las permutaciones de cinco elementos. Al final obtenemos $5\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=600$ posibilidades.

Contemos ahora cuántos de esos números acaban en 0. Si la última posición la tenemos ocupada por el 0, en los demás dígitos no tenemos restricciones, así que tendremos que contar solo las permutaciones de cinco elementos, que son $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$.

Contemos para terminar cuántos de esos números acaban en 5. Si la última posición la tenemos ocupada por el 5, para la cifra de la izquierda del todo, que no puede ser 0, tenemos cuatro posibilidades. Una vez fijada, no tenemos restricciones sobre las cifras restantes, así que nos basta con contar las permutaciones de cuatro elementos, y al final obtenemos $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$. Así pues, la probabilidad pedida queda, $\frac{120+96}{600} = \frac{216}{600} = \frac{9}{25}$

25.(A) Llamemos x al área de *SOL*. Los triángulos *SOL* y *LPK* son semejantes, y los lados del segundo miden el doble que los del primero, así pues, la razón entre sus áreas será 4, es decir, el área de *LPK* es $4x$. Tenemos también semejanza entre los triángulos *SOL* y *LUI*, pero en este caso la razón de semejanza entre sus lados es 3, por lo que la razón entre sus áreas será 9. Así llegamos a que el área del triángulo *LUI* es $9x$ y entonces el cuadrilátero *PUIK* tiene de área $5x$.

Llamemos z al área de *LUNA*. Ya que el área de *LUNA* es 3 veces el de *PUNG*, el área de *PUNG* es $\frac{1}{3}z$. Además, sabemos por el enunciado que el área de *PUIK* es el doble que el área de *KING*, y como entre los dos tienen de área $\frac{1}{3}z$, llegamos a que el área de *PUIK* es $\frac{2}{9}z$.

En conclusión, el área de *PUIK* es $5x = \frac{2}{9}z$, así pues, el cociente entre x, el área de *SOL*, y z, el área de *LUNA*, es $\frac{x}{z} = \frac{2}{9 \cdot 5} = \frac{2}{45}$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (A) Escribimos cada igualdad en potencias de la misma base, obteniendo $3^a = 3^{4b+8}$ y $5^{3b} = 5^{a-3}$. De esta forma los exponentes tienen que ser iguales y solo nos queda resolver el sistema $\begin{cases} a = 4b+8 \\ 3b = a-3 \end{cases}$ obteniendo los valores $a = 12$ y $b = 5$. Por lo tanto, $a \cdot b = 60$.

2. (B) El centro de la circunferencia se encuentra en el corte de las mediatrices. La mediatriz del segmento AB es la recta $y = 4$ y la del segmento AC es la recta $x = 5$. Por tanto, el centro de la circunferencia será O (5, 4) y el radio es la distancia $AO = \sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2} = 5$. Así que el área del círculo es 25π.

3. (C) Como los vértices consecutivos son 26, 2 y 8, solo tenemos que ver que hay 6 puntos entre el 2 y el 8 y como el polígono es regular también tiene que haber 6 puntos entre el 26 y el 2. Por tanto, la circunferencia está dividida en 30 puntos. Los vértices del polígono estarán en las posiciones 2, 8, 14, 20 y 26, por tanto será un pentágono y la suma pedida será 35.

4. (B) Como a, b y c son enteros y $a+\frac{b}{c}=197$ y $b+\frac{a}{c}=92$, entonces, tanto a como b han de ser múltiplos de c y podemos escribir $a = mc$ y $b = nc$.
Los datos del problema son, por tanto:
$\begin{cases} mc+n=197 \\ nc+m=92 \end{cases}$ y tenemos que calcular el valor de $\frac{a+b}{c}=\frac{mc+nc}{c}=m+n$
Sumando nuestras dos ecuaciones tenemos que:
$c(m+n)+m+n=289 \to (c+1)(m+n)=289$
Y ahora viene lo bueno, resulta que $289 = 17^2$ y tenemos solo tres casos posibles:
$\begin{cases} c+1=1 \\ m+n=289 \end{cases}$ es imposible porque c no puede ser cero.
$\begin{cases} c+1=289 \\ m+n=1 \end{cases}$ es imposible porque $c = 288$ no da soluciones enteras (¿te animas a comprobarlo?)
$\begin{cases} c+1=17 \\ m+n=17 \end{cases}$ ésta es la única solución posible, $\frac{a+b}{c}=m+n=17$
La solución es $a = 192$, $b = 80$, $c = 16$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

5. (B) Vamos a intentar conseguir al función $f(a)$. Si al sustituir a por x^2+1 obtengo un polinomio de grado 4 es porque $f(a)$ es de grado 2 y así $\left(x^2+1\right)^2$ dará x^4+2x^2+1 pero tenía que conseguir un $5x^2$, así que ajusto $f(a)=a^2+3a$, de esta forma $f\left(x^2+1\right)=x^4+5x^2+4$. Aún no lo hemos conseguido porque tenía que dar +3. Solo nos queda un pequeño ajuste. La función será $f(a)=a^2+3a-1$. En este caso ya es fácil averiguar que $f\left(x^2-1\right)=x^4-2x^2+1+3x^2-3-1=x^4+x^2-3$

OTRA FORMA

$f\left(x^2+1\right)=x^4+5x^2+3=x^4+2x^2+1+3x^2+3-1=\left(x^2+1\right)^2+3\left(x^2+1\right)-1$.

Luego la función f es, $f(a)=a^2+3a-1$ y por lo tanto $f(x^2-1)=\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-1=x^4-2x^2+1+3x^2-3-1=x^4+x^2-3$

6. (B) Si $x>1$ cumple que $\dfrac{1}{(\ln x)^{\ln x}}\leq\dfrac{1}{x^2}$, entonces:

$$x^2\leq(\ln x)^{\ln x}\rightarrow\ln x^2\leq\ln(\ln x)^{\ln x}\rightarrow 2\ln x\leq\ln x\cdot\ln(\ln x)\rightarrow 2\leq\ln(\ln x)\rightarrow$$
$$\rightarrow e^2\leq e^{\ln(\ln x)}\rightarrow e^2\leq\ln x\rightarrow e^{(e^2)}\leq e^{\ln x}\rightarrow e^{(e^2)}\leq x$$

7. (E) Elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad, obtenemos $a^2+b+2a\sqrt{b}=14+6\sqrt{5}$, comparando vemos que $a=3$ y $b=5$. Por tanto, a^2+b^2 es 34.

8. (A) Con las instrucciones del enunciado, la sucesión quedará así: $a, a+b-1, b, -a+2, -a-b+3, -b+2, a, a+b-1, b, \ldots$ Como podemos observar, cada 6 términos se repite la sucesión, así que sumamos esos 6 términos de la sucesión y obtenemos un 6. Como 2019 = 6·336+3, la suma de los 2019 términos será $6\cdot 336+a+a+b-1+b=2015+2a+2b$

9. (D) Para que la base tenga un perímetro de 14 solo hay tres posibilidades 1 × 6, 2 × 5 y 3 × 4. En cada uno de estos casos, y usando los 300 cubos indicados, la altura del prisma será 50, 30 y 25 respectivamente. Por tanto, la suma será 105.

10.(A) Si observamos la suma $1+3+9+27$ es múltiplo de 8, la suma de los siguientes cuatro términos $3^4+3^5+3^6+3^7$ también es múltiplo de 8 y así sucesivamente. Así que solo tenemos que ver cuántos de los 2020 términos no están agrupados, para ello vemos que 2020 = 4·505, no hay ninguno desagrupado, por tanto la suma es múltiplo de 8 y por tanto el resto de la división es 0.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

11.(B) Representamos los primeros pasos del juego para entenderlo.

Jorge	<u>15</u>	12	13	<u>14</u>	11	12	<u>13</u>	…	<u>12</u>	…	<u>3</u>	0
Miguel	14	<u>15</u>	12	13	<u>14</u>	11	12	…	11	…	2	
Santiago	13	14	<u>15</u>	12	13	<u>14</u>	11	…	10	…	1	
Bote	0	1	2	3	4	5	6	…	9	…	36	37 (fin)

Vemos que cuando el bote tiene un múltiplo de 3 de piedras es cuando Jorge va perdiendo una piedra: 15, 14, 13… Cuando Jorge tenga 3 piedras, ha perdido 12, así que el bote en ese momento tiene 12·3=36 piedras y en el siguiente paso es cuando acaba el juego, con 37 piedras.

12.(D) Planteamos el área sombreada como la suma de 4 trozos, dos sectores de corona circular y dos sectores circulares. $A_S = 2\cdot\frac{\pi\left(2^2-1^2\right)\cdot\left(180^o-\alpha\right)}{360^o}+2\cdot\frac{\pi\cdot 1^2\cdot\alpha}{360^o}$

$\Rightarrow A_S = \frac{3\pi\cdot\left(180^o-\alpha\right)}{180^o}+\frac{\pi\cdot\alpha}{180^o}=3\pi-\frac{2\pi\alpha}{180^o}$.

Planteamos el área de la zona blanca como la suma de dos sectores de corona circular y dos sectores circulares $A_b = 2\cdot\frac{\pi\left(2^2-1^2\right)\cdot\alpha}{360^o}+2\cdot\frac{\pi\cdot 1^2\cdot\left(180^o-\alpha\right)}{360^o}$

$\Rightarrow A_b = \frac{3\pi\alpha}{180^o}+\frac{180^o\pi-\pi\alpha}{180^o}=\pi+\frac{2\pi\alpha}{180^o}$.

Utilizamos la condición del enunciado $\frac{A_s}{A_b}=\frac{7}{3}=\frac{3\pi-\frac{\pi\alpha}{90^o}}{\pi+\frac{\pi\alpha}{90^o}}$, operando conseguimos

α $9\pi-\frac{3\pi\alpha}{90^o}=7\pi+\frac{7\pi\alpha}{90^o}\Rightarrow 2\pi=\frac{10\pi\alpha}{90}\Rightarrow\alpha=18^o$

13.(C) Escribimos la suma de los n naturales como la suma de una sucesión aritmética, quedaría así: $\sqrt{1+2+3+...+n}=\sqrt{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$. Solo tenemos que ver cuando $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ es un cuadrado perfecto. Eso solo ocurre si n es un cuadrado perfecto o uno menos, así que vamos probando con 1, 3, 4, 8, 9, 15, 16, 24, 25, 35, 36, 48, 49, 63, 64, 80, 81 y 99. Vemos que solo lo cumple n = 1, n = 8 y n = 49. Por tanto la solución es 3.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

14.(B) Los puntos *ABCD* forman un cuadrado, *A* y *B* están en el primer cuadrante. Por eso podemos definir $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}$ donde $\overrightarrow{DA}$ es perpendicular a $\overrightarrow{CD}=(-t,\, u)$ y tienen el mismo módulo, así que podemos asegurar que $\overrightarrow{DA}=(u,\, t)$, por tanto, $(p,\, q)=(0,\, u)+(u,\, t)$. Del mismo modo $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DA}$, $(r,\, s)=(t,\, 0)+(u,\, t)$. Con esta información tenemos que $p=u$, $q=u+t$, $r=u+t$, $s=t$. Utilizamos la información del enunciado que $p+q+r+s=36$, y sustituimos p, q, r, s por los valores obtenidos y tenemos $u+u+t+u+t+t=36$, por tanto $3u+3t=36$, así que $u+t=12$.

15.(D) 2^{1000} tiene 1000 doses. Vamos a ver cuántos doses hay en $1000!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 999\cdot 1000$. Todos los pares aportan un dos, los múltiplos de 4 aportan otro dos extra, los múltiplos de 8 otro más y así los vamos contando. Quedaría así:

- Múltiplos de 2 → 500
- Múltiplos de 4 → 250
- Múltiplos de 8 → 125
- Múltiplos de 16 → 62
- Múltiplos de 32 → 31
- Múltiplos de 64 → 15
- Múltiplos de 128 → 7
- Múltiplos de 256 → 3
- Múltiplos de 512 → 1

Hay 994 doses en 1000! Aún nos faltan seis. 1002 aporta un dos más, 1004 aporta otros dos, 1006 aporta otro más. Llevamos 998, aún nos faltan dos. 1008 aporta cuatro, así que ya hemos llegado a los 1000 doses. Por tanto, la solución es 1008!

16.(D) Aplicamos las propiedades de los logaritmos para operar la expresión dada

$$\frac{\log_a\left(\sqrt[3]{b^5}\right)^2-4\log_a\left(\frac{1}{b}\right)}{\log_a\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{b}}}\right)}=\frac{\log_a b^{\frac{10}{3}}-4\log_a b^{-1}}{\log_a b^{\frac{1}{24}}}=$$

$$=\frac{\frac{10}{3}\log_a b+4\log_a b}{\frac{1}{24}\log_a b}=\frac{\frac{10}{3}+4}{\frac{1}{24}}=176$$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

17.(C) Utilizamos la figura para definir $sen\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{l}{2}}{d}=\frac{1}{2\phi}$, por tanto $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{4\phi^2}}$.

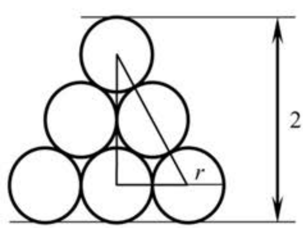
$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1-\frac{1}{4\phi^2}-\frac{1}{4\phi^2}=1-\frac{1}{2\phi^2}$, donde

$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad\Rightarrow\cos\alpha=1-\frac{4}{2\left(1+\sqrt{5}\right)^2}=1-\frac{2}{1+5+2\sqrt{5}}=\frac{4+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}=\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$,

racionalizamos y obtenemos la solución $\cos\alpha=\frac{6+\sqrt{5}-5}{9-5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{\phi}{2}$

18.(B) Las pendientes de las rectas son: $m_{AD}=-\frac{-1}{d}$, $m_{BE}=-\frac{2}{e}$, $m_{CF}=-\frac{4}{f}$. Como las rectas son paralelas todas las pendientes tienen que ser iguales, por tanto $f=2e$ y $-f=4d$, utilizando el dato del enunciado $d+e+f=40$, tenemos que $-\frac{f}{4}+\frac{f}{2}+f=40\Rightarrow\frac{5f}{4}=40\Rightarrow f=\frac{160}{5}$, por tanto la pendiente será $-\frac{4}{\frac{160}{5}}=-\frac{1}{8}$

19. (A) Nos apoyamos en el triángulo rectángulo dibujado en la figura, donde la hipotenusa mide $4r$, el cateto horizontal $2r$ y el cateto vertical lo llamamos x. Aplicando Pitágoras tenemos que $x=\sqrt{16r^2-4r^2}=2\sqrt{3}r$. Por otro lado, nos dicen que la altura de la figura resultante es 2, así que $2=2r+x=2r+2\sqrt{3}r$ $\Rightarrow r=\frac{2}{2+2\sqrt{3}}$ que racionalizando y simplificando queda $r=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$



XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

20.(C) Primero vamos a definir todas las variables que vamos a utilizar: la distancia de Marta al gimnasio, d_{MG}, la distancia de Marta a casa, d_{MC}, la velocidad que lleva andando, v_a, la velocidad que lleva en bici, v_b, el tiempo que tarda Marta en llegar al gimnasio, t,el tiempo que tarda Marta en llegar a casa, t'.

Aplicando que en un movimiento uniforme la distancia es igual a la velocidad por el tiempo, tenemos $d_{MG} = v_a \cdot t$, $d_{MC} = v_a \cdot t'$. Utilizamos el movimiento de Marta cuando vuelve a casa a por la bici para ir al gimnasio, esto quedaría $d_{MC} + d_{MC} + d_{MG} = v_a \cdot t' + v_b \cdot (t - t')$, sustituyendo d_{MC} y d_{MG} y teniendo en cuenta que $v_b = 7v_a$, obtenemos $v_a \cdot t' + v_a \cdot t' + v_a \cdot t = v_a \cdot t' + 7v_a \cdot (t - t')$, operando $8v_a \cdot t' = 6v_a \cdot t \Rightarrow \frac{t'}{t} = \frac{3}{4}$.

Por otro lado la relación que piden en el enunciado es $\frac{d_{MC}}{d_{MG}} = \frac{v_a \cdot t'}{v_a \cdot t} = \frac{t'}{t} = \frac{3}{4}$

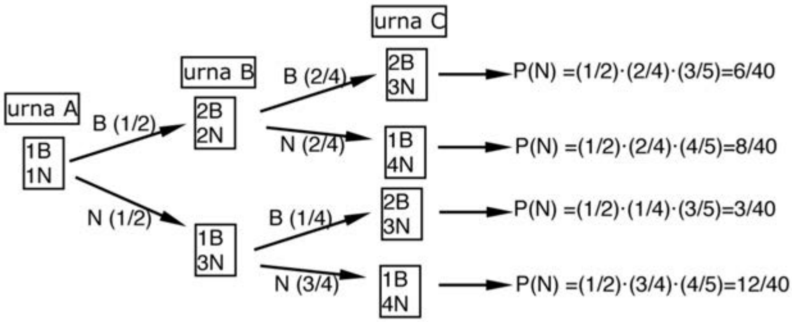
21.(A) Observamos que si $x < -1$, entonces, $x(x^2 - 1)$ es a la fuerza negtaivo y, por tanto, como $y^2 = x(x^2 - 1)$, deducimos que y no existe. Así que ya podemos descartar las respuestas B, C y E. ¿Cómo nos decidimos entre la A y la D? Podemos ver que si x toma valores muy grandes, y también los toma muy grandes (en valor absoluto). La respuesta es A.

22.(D) Empezamos contando cuántos números hay con tres cifras 1 iguales:
$111a$ hay 9 (a puede ser 0, 2, 3, 4, 5 ,6 ,7, 8, 9)
$11a1$ hay 9
$1a11$ hay 9
$a111$ hay 8 (a puede ser 2, 3, 4, 5 ,6 ,7, 8, 9)
En total hay 35 números con tres unos. Igual razonamiento vale si las tres cifras iguales son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Así pues, llevamos contabilizados ya $9 \cdot 35 = 315$.
Números con tres cifras 0 iguales hay solo 9, del tipo:
$a000$ (a puede ser 1, 2, 3, 4, 5 ,6 ,7, 8, 9)
En total hay $315 + 9 = 324$ números con, exactamente, tres cifras iguales

23.(A) Como $z^2 = 2z - 2$, entonces $z^4 = (2z - 2)^2$. Desarrollamos:
$z^4 = 4z^2 - 8z + 4 = 4z^2 - 8z + 8 - 4 = 4z^2 - 4(2z - 2) - 4 = 4z^2 - 4z^2 - 4 = -4$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

24.(D) Hagamos un diagrama de árbol:



La probabilidad de obtener bola negra en la última extracción es:

$$P(N)=\frac{6}{40}+\frac{8}{40}+\frac{3}{40}+\frac{12}{40}=\frac{29}{40}.$$

25.(C) PRIMER MÉTODO

Si desconocemos la recta de Euler o simplemente queremos contestar cuál es la opción correcta, elegimos unos números complejos cuyos afijos determinan un triángulo fácil de manejar.

$a=0+2i$, $b=0+0i$ y $c=2+0i$ cuyos afijos son $A(0, 2)$, $B(0, 0)$ y $C(2, 0)$.

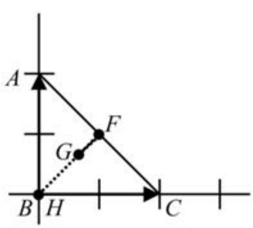
Su circuncentro, por tratarse de un triángulo rectángulo isósceles, es el punto medio de su hipotenusa, $F(1,1)$, su baricentro $G\left(\frac{0+0+2}{3},\frac{2+0+0}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ y su ortocentro $H(0, 0)$, como muestra la figura.

Calculamos la suma $a+b+c$ que aparece en todas las respuestas.

$a+b+c=(0+2i)+(0+0i)+(2+0i)=2+2i$

$f=1+i\Rightarrow 2f=2+2i$ y como $h=0+0i$, entonces $2f+h=2+2i=a+b+c$.

Ninguna de las otras opciones se verifica.

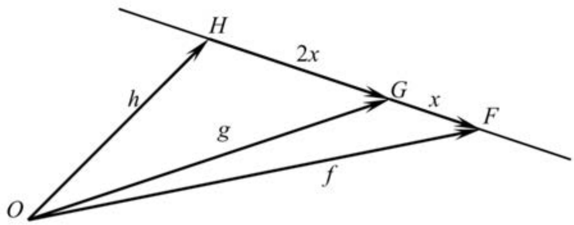


XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

SEGUNDO MÉTODO

Si se conoce la recta de Euler que es la que pasa por: circuncentro, baricentro y ortocentro, con la particularidad de que $HG = 2GF$, entonces, se verifica como muestra la figura, que $\vec{g} = \vec{h} + 2\vec{x}$ y $\vec{f} = \vec{g} + \vec{x}$. Eliminando el vector $\vec{x}$ entre las dos igualdades se concluye que $3\vec{g} = 2\vec{f} + \vec{h}$, es decir, que $3g = 2f + h$.

Y como el baricentro es el afijo de $\frac{a+b+c}{3}$ tenemos que $3\frac{a+b+c}{3} = 2f + h$ y por lo tanto $a + b + c = 2f + h$.



Participantes y relación de ganadores del XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

El número de participantes en la primera fase celebrada en los propios centros sigue aumentando. En este año se superó la cifra de 50 000 estudiantes de 520 centros participantes.

Aunque se inscribieron 3898 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 3454. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página (https://www.concursoprimavera.es) de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

	NIVEL 1				NIVEL 2			
	5º P		6º P		1º ESO		2º ESO	
nº de participantes (inscritos)	145 (150)	76 (85)	386 (406)	196 (208)	301 (327)	157 (173)	400 (440)	266 (290)
Totales por curso	221 (235)		582 (614)		458 (500)		666 (730)	
Totales por nivel	803 (849)				1124 (1230)			

	NIVEL 3				NIVEL 4			
	3º ESO		4º ESO		1º Bach.		2º Bach.	
nº de participantes (inscritos)	316 (372)	150 (181)	347 (401)	173 (199)	248 (294)	119 (152)	130 (163)	44 (57)
Totales por curso	466 (553)		520 (600)		367 (446)		174 (220)	
Totales por nivel	986 (1153)				541 (666)			

Llama la atención la participación según las edades, siendo los niveles 3 y el 2, sobre todo, los que más participan y los mayores, de nivel 4, los que menos.

También queda palpable que las chicas participan en menor número, solo el 34 % de los participantes en esta última fase son chicas y que en los niveles de mayor edad este porcentaje es aún menor, en 2º de bachillerato solo el 25 %.

Los tres, y en un caso cinco, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

NIVEL I

1.	Alessandro Mateos Avallone	(6º Primaria) CPR El Valle
2.	Nuria Martín Jiménez	(5º Primaria) CPR Edith Stein
3.	Fernando Coloma Regadera	(6º Primaria) CPR San Agustín
3	Carlos Jiménez Bañón	(6º Primaria) CP Lorenzo Luzuriaga
3	Pablo Laguna Escobar	(6º Primaria) Colegio Alemán de Madrid

NIVEL II

1.	Diego López Aragón	(1º ESO) IES María Guerrero
2.	Miguel Barquero Draper	(2º ESO) CPR San Agustín
3.	David Morilla Iglesias	(2º ESO) IES La Estrella

NIVEL III

1.	Jimena Lozano Simón	(4º ESO) Colegio Alemán de Madrid
2.	Álvaro Gamboa Rodríguez	(3º ESO) IES Ciudad de los Poetas
3.	Santiago Arce Carpio	(4º ESO) Aquinas American School (Pozuelo…

NIVEL IV

1	Gabriel Valery Salov	(1º Bchto) IES Juan de Herrera
2.	Alejandro Meléndez Reyes	(1º Bchto) CPR La Salle
3.	Jorge Maceín Sanz	(1º Bchto) IES San Juan Bautista

Participantes y relación de ganadores

RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MEJOR PUNTUACIÓN POR NIVEL

(Elaborada con las tres mejores puntuaciones de cada centro en cada nivel)

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA Mayo 2019

NIVEL I		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
CPR SAN AGUSTÍN	Madrid	300
CPR ALKOR	Madrid	280
CP LORENZO LUZURIAGA	Madrid	279
CP CIUDAD NEJAPA	Tres Cantos (Madrid)	274
CP FRAY PEDRO DE AGUADO	Valdemoro (Madrid)	274
CPR FUNDACIÓN CALDEIRO	Madrid	270
CPR SAGRADOS CORAZONES	Madrid	266
CEX COGNITA HASTING HOLDINGS	Madrid	265
CEX RUNNYMEDE COLLEGE	Alcobendas (Madrid)	265
CPR NTRA. SRA. SANTA MARÍA	Madrid	262

NIVEL II		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
CPR SAN AGUSTÍN	Madrid	293
IES LA ESTRELLA	Madrid	242
COLEGIO ALEMÁN	Madrid	233
CPR AGUSTINIANO	Madrid	229
IES AVENIDA DE LOS TOREROS	Madrid	229
CPR NTRA SRA DEL BUEN CONSEJO	Madrid	221
IES LÁZARO CARDENAS	Collado Villalba(Madrid)	207
IES DOCTOR MARAÑÓN	Alcalá de Henares(Madrid)	207
CPR ÁBACO	Madrid	205
CPR INTERNACIONAL NUEVO CENTRO	Madrid	202
CPR OBISPO PERELLÓ	Madrid	202

NIVEL III		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
CPR JOYFE	Madrid	243
CPR LAUDE FONTENEBRO SCHOOL	Moralzarzal (Madrid)	206
IES SAN JUAN BAUTISTA	Madrid	200
CPR MONTE TABOR	Pozuelo Alarcón (Madrid)	189
CEX KINGS COLLEGE	Tres Cantos (Madrid)	188
CPR AMOR DE DIOS	Madrid	188
IES CIUDAD DE LOS POETAS	Madrid	184
CPR ASUNCIÓN CUESTABLANCA	Madrid	183
IES EL BURGO DE LAS ROZAS	Las Rozas (Madrid)	183
CPR MIRABAL	Boadilla del Monte(Madrid)	179
IES BEATRIZ GALINDO	Madrid	179

NIVEL IV		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
IES SAN MATEO	Madrid	228
IES RAMIRO DE MAEZTU	Madrid	224
COLEGIO ALEMÁN	Madrid	213
KING´S COLLEGE	Tres Cantos (Madrid)	207
IES SAN JUAN BAUTISTA	Madrid	199
IES JUANA DE CASTILLA	Madrid	176
CPR COLEGIO JOYFE	Madrid	168
IES ÁNGEL CORELLA	Colmenar Viejo(Madrid)	163
CPR INTERNACIONAL NUEVO CENTRO	Madrid	161
CPR LA SALLE	Madrid	159

XXXVII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 18 de mayo de 2019

NIVEL I (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)

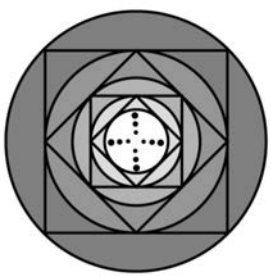
Determina todos los valores reales de $x \neq 0$ para los cuales resulta que la y no es real en la ecuación $y = \dfrac{x}{x + \dfrac{x}{x+y+1}}$

Problema 2. (7 puntos)

En una circunferencia de radio $r = 1$ inscribimos un cuadrado. En este cuadrado inscribimos otra circunferencia y así sucesivamente vamos inscribiendo, de forma alternativa, cuadrados y circunferencias como muestra la figura.

Determina:

a) La suma de las áreas de los infinitos círculos que determinan las circunferencias.
b) La suma de las áreas de los infinitos cuadrados.
c) El cociente entre las áreas de los infinitos círculos y las áreas de los infinitos cuadrados.
d) Comprueba que ese cociente es igual al cociente del área del primer círculo y el primer cuadrado.



XXXVII Concurso Puig Adam

NIVEL I (3º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto) Justifica por qué no existe un polígono regular en el que dos lados consecutivos formen un ángulo de 130º y calcula el número de lados del polígono regular en el que dos lados consecutivos forman un ángulo de 175º.

Problema 2A. (1,5 puntos**)** Sea T la respuesta del problema anterior.

Si x e y son enteros positivos que verifican la igualdad $Tx^2 = y^3$, ¿cuál es el menor valor posible para la suma $x + y$?

Problema 3A. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.
Aplicamos al punto A, de coordenadas $(T, 5)$, un giro de centro el punto $O(16, -6)$ y 90º de amplitud (en sentido antihorario) para obtener otro punto B. A continuación aplicamos a este punto una traslación con vector de traslación $\vec{u} = (7, 4)$ (7 unidades a la derecha y 4 hacia arriba) para obtener otro punto C.
Calcula el área del triángulo ABC.

Problema 1B. (1 punto) Tenemos tres números enteros consecutivos a, b, c tales que verifican que al sumar 10 al del medio y un número primo k al mayor se obtiene una progresión geométrica $a, b + 10, c + k$. ¿Qué número tiene que ser el primo k?

Problema 2B. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.

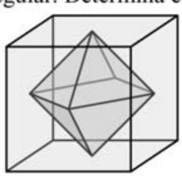
Dadas las funciones $g(x) = 7x + 3$ y $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(7x+3) = x^2 - 5x + 8$ calcula el valor de $f(T)$.

Problema 3B. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.
Completa el "cuadrado mágico" de la figura. ¿Cuál es el mayor número que aparece?
Nota. En un cuadrado mágico la suma de los números de cada fila, cada columna y cada diagonal es la misma

		14
10		***T***

Problema 4. (5 puntos) Sea a la respuesta del problema 3A y b la respuesta del problema 3B.

La arista del cubo de la figura es $\dfrac{a}{b}$. Los centros de las caras del cubo son los vértices de un octaedro regular. Determina el volumen del octaedro.



XXXVII Concurso Puig Adam

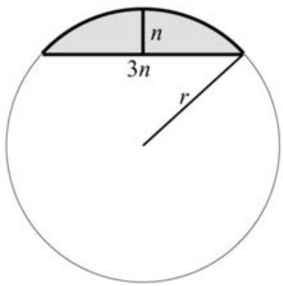
NIVEL II (4º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)

Encuentra todos los números n, comprendidos entre 2000 y 3000, tales que los restos que se obtienen al dividirlos entre 4, 5 y 7 son, respectivamente, 3, 1 y 6.
Es decir: $n = 4a + 3 = 5b + 1 = 7c + 6$.

Problema 2. (7 puntos)

Sea n un entero positivo. En el segmento circular de la figura la longitud de la cuerda es $3n$ y la de la flecha n. Determina el menor valor de n para el cual la longitud del radio de la circunferencia es un número entero. Calcula también la longitud del radio.

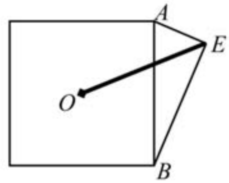


XXXVII Concurso Puig Adam

NIVEL II (4º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
¿Cuántos números de 6 cifras de la forma 2019AB son múltiplos de 21?

Problema 2A. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.
La hipotenusa de un triángulo rectángulo coincide con el lado de un cuadrado de centro O, como muestra la figura.

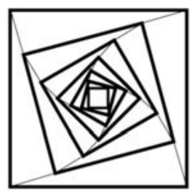


Si la longitud del cateto AE es T y la del segmento OE es $\dfrac{17}{\sqrt{2}}$,

¿cuál es la longitud del lado AB del cuadrado?

Problema 3A. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.
La suma de las longitudes de las 12 aristas de una caja, con tapa, con forma de ortoedro (caras rectangulares) es 56 cm y la distancia entre uno de los vértices de la caja y el más lejano es T cm. ¿Cuál es, en cm^2, el área total de la caja?

Problema 1B. (1 punto) En la portada del Boletín de la Sociedad Puig Adam de Matemáticas aparece esta figura, formada por cuadrados y triángulos rectángulos, todos semejantes entre sí. Los lados del cuadrado más pequeño son paralelos a los del cuadrado mayor.
¿Cuántos grados mide el ángulo menor de los triángulos rectángulos?



Problema 2B. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.
La suma de los T primeros términos de una progresión aritmética, de diferencia 5, es 570. ¿Cuál es el primer término de la progresión?

Problema 3B. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior..
En un dado defectuoso se sabe que, al lanzarlo, la probabilidad de obtener un 6 es doble de la probabilidad de obtener un 1 y que las demás caras tienen la misma probabilidad de obtenerse que las de un dado perfecto. Se ha lanzado el dado T veces y en ninguno de los lanzamientos se ha obtenido el 1. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de puntos obtenidos sea 10?

Problema 4. (5 puntos) Sea a la respuesta del problema 3A y b la respuesta del problema 3B.
Un cubo de arista $a \cdot b$ está inscrito en una superficie esférica. Determina el área de dicha superficie esférica.

XXXVII Concurso Puig Adam

NIVEL III (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

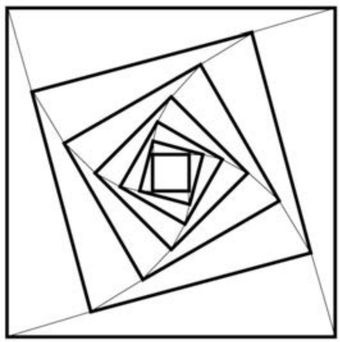
Problema 1. (7 puntos)

Determina todos los enteros positivos m y n para los que $m^2 + 8 = 3^n$.

.

Problema 2. (7 puntos)

En la portada del Boletín de la Sociedad Puig Adam de Matemáticas aparece esta figura formada por cuadrados y triángulos rectángulos, todos semejantes entre sí y los lados del cuadrado más pequeño son paralelos a los del cuadrado mayor.
Si el lado del cuadrado mayor es de 8 cm, ¿cuál es el área del cuadrado menor?



XXXVII Concurso Puig Adam

NIVEL III (1º de Bachillerato) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)

Encontrar el valor de x que verifica la ecuación $\sqrt{x}+\sqrt{x+80}=10\sqrt{2}$.

Problema 2A. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior y.

Se consideran los enteros positivos $a, b, c,$ tales que $a + 2bc = T + 2$ y $a + b = T + 1$.
¿Cuál es el valor de $a + b + c$?

Problema 3A. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.

Calcula el valor de la suma $\log_4 2+\log_4 2^2+\log_4 2^3+\log_4 2^4+...+\log_4 2^T$.

Problema 1B. (1 punto)

Sea k un número dado, a y b las soluciones de la ecuación $x^2+2x-k=0$ y c y d las soluciones de la ecuación $x^2-4x+k-4=0$. Calcula $a^2+b^2+c^2+d^2$.

Problema 2B. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior y $b=\dfrac{T}{7}$.

Calcula el valor máximo de la función $f(x)=-x^2+bx+c$ sabiendo que $f(20)=19$.

Problema 3B. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior..

Se considera la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ de diferencia $d = 4$, $a_1 = T$ y $a_n = 2019$. Determina el valor de n.

Problema 4. (5 puntos)

Sean a y b las respuestas de los problemas 3A y 3B, respectivamente.
Una pista circular tiene un perímetro de a metros. Alex y Bea empiezan a correr en esa pista, desde el mismo punto y simultáneamente. Alex corre a velocidad constante y tarda 15 segundos en recorrer toda la pista. Bea, que también corre a velocidad constante, tarda 160 segundos en recorrer b metros. Cuando vuelven a coincidir, por primera vez, en el punto de salida, Alex ha dado m vueltas y Bea ha dado n vueltas. Calcula $20m + 19n$.

XIX Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"* Comunidad de Madrid

30 de noviembre de 2019

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. Como seguro que ya sabéis, la media aritmética de dos números positivos x e y es la mitad de su suma: $\frac{x+y}{2}$. Lo que tal vez no sepáis es que la media geométrica de dos números es la raíz cuadrada de su producto: $\sqrt{x \cdot y}$.
Encontrad un par de números tales que su media aritmética sea 13 y su media geométrica sea 12. Explicad cómo los habéis encontrado.

2. Cuando en B son las 14:00 en A son las 18:00. Un avión partió un viernes de A hacia B haciendo una escala intermedia en C. Durante la escala en C estuvieron detenidos 2 horas y 10 minutos. El vuelo llegó a B el sábado a las 12:15 (hora de B). El avión estuvo volando en total 14 horas y 10 minutos. ¿Qué hora era en A cuando despegó el avión?

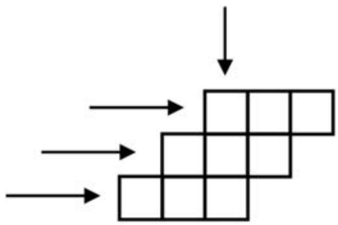
3. El cuadrado $ABCD$ tienen 36 cm de lado. El punto E está sobre el lado AB a 12 cm de B, F es el punto medio del lado BC y el punto G está sobre CD a 12 cm de C.
¿Cuál es el área de la región que está dentro del triángulo EFG y fuera del triángulo AFD?

XIX Concurso Intercentros

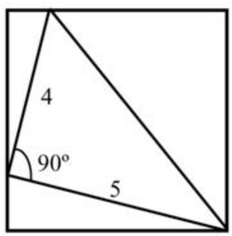
PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. Un juego consiste en elegir varios enteros positivos diferentes que sumen 17 y hallar su producto. ¿Cuál es el producto máximo que puede conseguirse?

2. Tenéis que rellenar esta cuadrícula con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de tal manera que los números de tres cifras que señalan las flechas sean cuadrados perfectos.



3. Hemos encajado un triángulo rectángulo de catetos 4 y 5 en un cuadrado como puedes ver en el dibujo. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

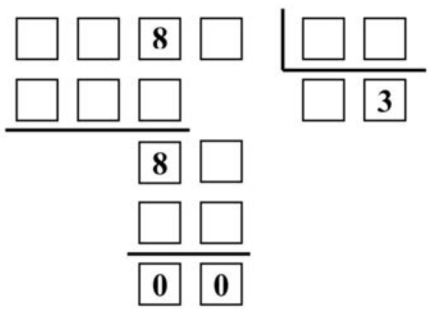


XIX Concurso Intercentros

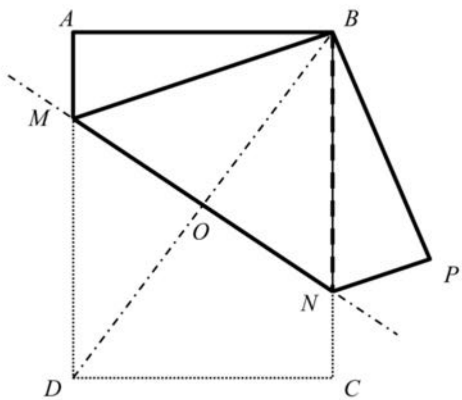
<u>PRUEBA POR EQUIPOS</u> Bachillerato. (45 minutos)

1. Tenemos dos números naturales tales que la suma de: su producto, su suma, el cociente del mayor entre el menor y la diferencia del mayor menos el menor es igual a 3125. ¿Cuáles son esos dos números?

2. Completa la división



3. Disponemos de una hoja de papel rectangular, $ABCD$, de lados $AB = 8$ cm y $AD = 16$ cm. La plegamos de manera que el vértice D coincida con el B, como muestra la figura. Calcula la longitud del segmento MN.



XIX Concurso Intercentros

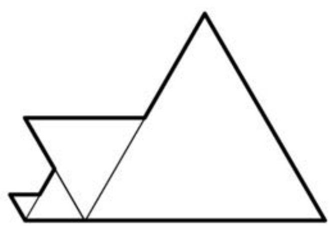
1. En un tablero de ajedrez de 8×8 colocamos números siguiendo las siguientes reglas:
   - En las casillas blancas se escribe un 0 o un 1, de modo que haya la misma cantidad de casillas blancas con ceros que con unos.
   - En cada casilla negra se escribe la suma de los números que hay en las casillas blancas vecinas.

   Una vez relleno hacemos la suma de todos los números que hay escritos en el tablero. ¿Cuál es la diferencia entre el menor y el mayor valor que podemos obtener para esa suma?

2. A un concierto benéfico acudieron 2 000 personas. Cada una pagó por su entrada una cantidad entera entre 1 y 500 euros (ambos inclusive).
   Al hacer caja se observó que se habían vendido entradas de todos los precios posibles, que ningún precio se repitió más de 10 veces y que, con esas condiciones, la recaudación fue la mínima posible.
   ¿Cuántas entradas de cada precio se vendieron?

3. Si $20^{2019} = 10^{2010} \cdot 40^{9} \cdot 2^{n}$, ¿cuánto vale n?

4. Partiendo de un triangulito equilátero de 1 cm de lado, y añadiendo otros cuatro triángulos equiláteros tales que los lados de uno miden el doble que los del anterior hemos formado esta figura. Si continuamos hasta poner 10 triángulos, ¿cuál será el perímetro de la figura resultante? Encuentra una fórmula que te permita calcular el perímetro para n triángulos.

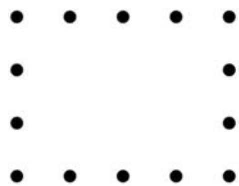


XIX Concurso Intercentros

PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

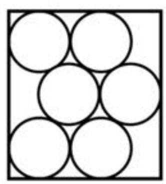
1. Dentro de un año la edad de Alberto será el doble que la edad de Bea. Dentro de unos años, cuando yo tenga 66 años, la suma de las edades de Alberto y Bea también será 66. Dentro de 6 años mi edad será un múltiplo de la suma de las edades de Alberto y Bea. ¿Cuántos años tengo hoy?

2. Estás viendo algunos puntos formando un rectángulo. Usando esos puntos como vértices, ¿cuántos triángulos podemos formar?



3. Hemos metido en una caja 100 tarjetas numeradas desde el 1 hasta el 100. ¿Cuál es el máximo número de tarjetas que puedo elegir para asegurarme de que entre las que elijo no hay ninguna que sea el doble de otra?

4. Los seis círculos de la figura tienen un radio de 5 cm y, como ves, son tangentes entre sí y también a los lados de un rectángulo.
¿Cuánto miden los lados del rectángulo?



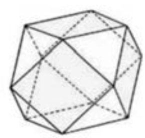
XIX Concurso Intercentros

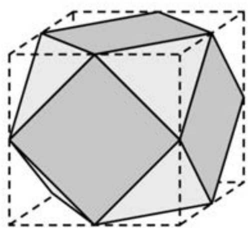
PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

1. Tres amigos tienen que sembrar un huerto y atacan juntos esta tarea. Primero empiezan Don Retorcido y la niña Centésima y entre los dos plantan la mitad del huerto. Después Don Retorcido se pone a descansar y continúan con la tarea la niña Centésima y Comenúmeros. Al terminar Don Retorcido apunta "es curioso, de esta manera hemos tardado el doble de tiempo que si hubiéramos trabajado los tres juntos desde el principio". Si en plantar una semilla Don Retorcido emplea 2 segundos y Comenúmeros emplea 5 segundos, ¿cuántos segundos emplea la niña Centésima en plantar una semilla?

2. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ y $g(x) = 2x - 3$ calcula el valor de $\left(f \circ g \circ f^{-1}\right)(2)$.

3. El *cuboctaedro* es un poliedro arquimediano o poliedro semirregular cuyas caras son triángulos equiláteros y cuadrados. Se obtiene truncando un cubo por los vértices.
Calcula la superficie del cuboctaedro que se obtiene truncando un cubo de volumen de 64 cm^3.





4. En una bolsa hay bolas blancas y negras. Si quitamos 15 bolas blancas el porcentaje de bolas blancas disminuye un 3 % y si aumentamos 10 bolas negras el porcentaje de bolas blancas disminuye un 5 %. ¿Cuántas bolas de cada clase hay en la bolsa?

XIX Concurso Intercentros

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

Empieza aquí

1A.- En un curso de inglés se inscribieron 30 personas.
La media de edad de todos los inscritos es 21. La media de edad de los chicos es 25 y la de las chicas es 20.
¿Cuántos de los inscritos son hombres?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

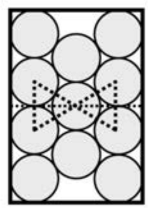
1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B

A la fiesta de la geometría acudieron $2 \cdot T$ invitados entre puntos y rectas. El primer punto bailó con 8 rectas; el siguiente punto bailó con 10 rectas; el siguiente con 12; y así sucesivamente hasta que el último punto bailó con todas las rectas.
¿Cuántas rectas fueron a la fiesta de la geometría?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.

Disponemos de 11 balones de minibasket de $\frac{T}{2}$ cm de diámetro que queremos guardar en una caja de $\frac{T}{2}$ cm de alta y $2T$ cm de larga.
Calcula el ancho de la caja más pequeña en la que caben los 11 balones.



(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

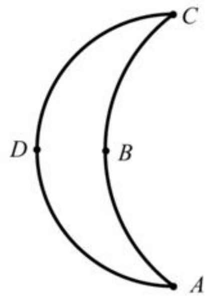
XIX Concurso Intercentros

3º y 4º de ESO.-

.

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.

En la luna de la figura ADC es una semicircunferencia de radio T y ABC es un cuarto de circunferencia. ¿Cuál es el área de la luna?



(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

➲2B.- Empieza aquí

¿Cuánto suman las cifras del número A?

$A = 7665667^2 - 7665662^2$

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

Calcula el área del cuadrilátero limitado por las gráficas de estas cuatro funciones

$$y = x - 7, \quad y = -x - 1, \quad y = T + 2(6 - x), \quad y = 2x - 4$$

Nota. Es aconsejable representar gráficamente las funciones.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

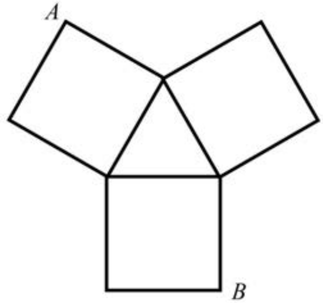
XIX Concurso Intercentros

Bachillerato.-

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.

En la figura ves un triángulo equilátero de lado T con un cuadrado sobre cada uno de sus lados. Expresa la longitud del segmento AB en la forma $a+b\sqrt{c}$ con a, b, c enteros y c el menor posible.

¿Cuánto vale $\frac{a+b+c}{3}$?



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B

Cuando todos partieron por la mañana al gran picnic anual, cada minibús llevaba exactamente el mismo número de personas. A mitad de camino se rompieron $T-52$ minibuses, de modo que cada minibús debió llevar una persona más. Cuando volvían a casa se estropearon $T-47$ minibuses más, así que en el camino de regreso había en cada minibús 3 personas más que al salir por la mañana.
¿Cuántas personas asistieron al gran picnic anual?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

➲ Empieza aquí

3C.- Un cuadrado y un octógono regular tienen la misma apotema. Si el perímetro del cuadrado es $4+4\sqrt{2}$, ¿cuál es el perímetro del octógono?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE CERO: viernes 26 de octubre de 2019

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

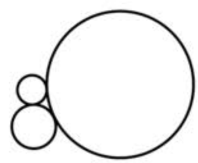
1. Un grupo de 25 estudiantes se presenta a una prueba en la que pueden obtener una nota entera desde 0 hasta 100. ¿Cuál puede ser la máxima diferencia entre la nota media y la mediana de este grupo de estudiantes?

   A) 48 B) 50 C) 40 D) 52 E) 60

2. Los números enteros positivos 30, 72, y N tienen la propiedad de que el producto de dos cualesquiera de ellos es divisible entre el tercero. ¿Cuál es el menor valor posible de N?

   A) 120 B) 180 C) 30 D) 60 E)10

3. He dibujado tres circunferencias (de radios 2, 3 y 10 cm) tangentes entre sí como ves en el dibujo. ¿Cuál es el área, en cm^2, del triángulo cuyos vértices son los centros de las circunferencias?



   A) 28 B) 20,5 C) 10 D) 15 E) 30

4. Un número n de cuatro cifras es capicúa. También es capicúa el número $n + 312$, que tiene cinco cifras. ¿Cuál es la suma de las cifras de n?

   A) 18 B) 14 C) 32 D) 33 E) 34

5. En la sucesión a_1, 6, a_3, …, la suma de cuatro términos consecutivos es constante, y también es constante la diferencia –el mayor menos el menor– de dos términos consecutivos cualesquiera. Sabiendo además que $a_1 < a_2 = 6 < a_3$, ¿cuánto vale la suma de los 2019 primeros términos de la sucesión?

   A) 2019 B) 2020 C) 4038 D) 12 114 E) 12 120

6. ¿Para qué valores del número real k la ecuación $x^2 + kx + k = 0$ tiene dos soluciones reales de distinto signo?

   A) $0 < k < 1$ B) $k > 4$ C) $k > 0$ D) $k < 0$ E) $k > 1$

LVI Olimpiada Matemática

7. En un pentágono regular $ABCDE$ de lado 1, las diagonales AC y BE se cortan en P. ¿Cuánto mide el segmento PC?

A) 1 B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\sqrt{5}-1$ D) $4\left(\sqrt{5}-2\right)$ E) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

8. ¿Cuántos subconjuntos A del conjunto $B = \{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$ cumplen que:

[número de elementos de A] × [máximo elemento de A] = 18?

A) 380 B) 20 C) 3 D) 190 E) 19

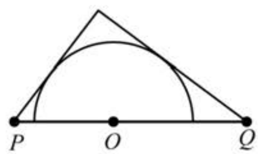
9. Los dos lados opuestos de un cuadrado aumentan su longitud en un 25%. ¿En qué porcentaje deben disminuir los otros dos lados para que el área del rectángulo resultante sea la misma que la del cuadrado inicial?

A) 20% B) 22,5% C) 25% D) 40% E) 42%

10. Un polinomio $P(x)$ cumple que $P(x^2+1) = x^4 - 2x^2 + 1$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es igual a $P(x^2+2)$?

A) $x^4 - 4x^2 + 2$ B) $x^4 - 2x^2$ C) $x^4 - 4x^2 + 1$ D) x^4
E) $x^4 - 2x^2 + 2$

11. En el dibujo mostramos un triángulo rectángulo de hipotenusa PQ en el que hay inscrita una semicircunferencia de radio 12 cm y centro O. Si PO mide 15 cm, ¿cuántos cm mide OQ?



A) 24 B) 20 C) 25 D) 22,5 E) 18

12. Si el número $N = 99\ldots99$ está formado exclusivamente por 99 nueves, ¿cuánto suman las cifras del número N^2?

A) 1782 B) 900 C) 891 D) 899 E) 990

13. La suma de un número más su inverso es 7. ¿Cuánto vale la suma del cubo de dicho número más el inverso de su cubo?

A) 322 B) 700 C) 343 D) 294 E) 336

14. De cierta función f sabemos que $f(1) = 4$ y que $f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ para todos los reales x, y. ¿Cuál es el valor de $f(3)$?

A) 194 B) 160 C) 52 D) 48 E) 62

15. En el cuadrilátero $ABCD$, $AB = 24$, $BC = 20$, $CD = 15$, $DA = 7$ y la diagonal BD mide 25. ¿Cuánto mide la diagonal AC?

A) 18 B) $14\sqrt{2}$ C) 20 D) 21 E) 24

16. Si $n=\sqrt{120-\sqrt{x}}$ es entero, ¿cuántos valores puede tomar x?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 10 E) 11

17. Si los términos 5º y 8º de una progresión geométrica son 7! y 8!, ¿cuál es el primer término de esa progresión?

A) 60 B) 75 C) 120 D) 225 E) 315

18. El lado del cuadrado *LUCA* es 20. En el interior de *LUCA* tomamos un punto *P* de modo que el triángulo *PUC* sea equilátero. Si $LP^2 = a - b\sqrt{3}$ con a y b enteros, ¿Cuál es el valor de b?

A) 350 B) 400 C) 450 D) 500 E) 625

19. Los números *retorcidos* son enteros positivos múltiplos de 4, y tales que al sumarles 1, el nuevo número es múltiplo de 5, y al sumarles 2 lo es de 6. ¿Cuántos números *retorcidos* son menores que 2019?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 33 E) 34

20. En la celda central de un tablero 5 × 5 colocamos una ficha. Un movimiento de la ficha consiste en desplazarla a una celda con la que comparta un vértice. Tras realizar al azar 12 movimientos, ¿cuál es la probabilidad de llegar a una de las esquinas del tablero?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{4}{25}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{13}$ E) $\frac{1}{4}$

21. Para cuántos enteros n positivos se consigue que $n^2 + 18n$ sea un cuadrado perfecto?

A) Uno B) Dos C) Tres D) Cuatro E) Ninguno

22. Pensemos ahora en números naturales con la siguiente propiedad: la suma de sus cuatro divisores es 42. ¿Cuántos números cumplen esta propiedad?

A) Ninguno B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

23. Tengo una bolsa llena de canicas idénticas. La suma de los pesos de todas las parejas posibles es 630 gramos. La suma de los pesos de todas las ternas posibles es 4095 gramos. ¿Cuántos gramos pesa cada canica?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

24. El triángulo *ABC* es isósceles, con *AB* = *AC*. La bisectriz interior del ángulo *ABC* corta al lado *AC* en el punto *P*. Si la circunferencia circunscrita al triángulo *BPC* pasa por el punto medio de *AB*, el ángulo *BAC* mide…

A) 30º B) 45º C) 60º D) 90º E) 105º

LVI Olimpiada Matemática

25. En una urna hay tres bolas numeradas con los números 1, 2 y 3. Sacamos una al azar, anotamos el número y la devolvemos a la urna. Volvemos a realizar este proceso dos veces más y al finalizar sumamos los tres números obtenidos, que resulta ser 6. ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido la bola del número 2 en las tres ocasiones?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{27}$

26. Si $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ y $x^2 \neq 1$, entonces $f(-x)$ es igual a:

A) $\frac{1}{f(x)}$ B) $-f(x)$ C) $f(x)$ D) $-\frac{1}{f(x)}$ E) $1-\frac{1}{f(x)}$

27. Dos rectas con pendientes $\frac{1}{2}$ y 2 se cortan se cortan en el punto $P(2,2)$. El área del triángulo determinado por estas dos rectas y la que tiene de ecuación $x+y=10$ es:

A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) 6 D) 8 E) $6\sqrt{2}$

28. Si n es un entero positivo tal que $(n+1)!+(n+2)!=n!\cdot 440$, la suma de las cifras de n es:

A) 3 B) 5 C) 6 D) 10 E) 11

29. Del triángulo ABC sabemos que $AB = AC$ y que el ángulo desigual mide 40º. Si la altura trazada desde C corta a su base AB en el punto D con $BD\cdot BA = 32$ cm, ¿qué longitud, en cm, tiene el lado BC?

A) 8 B) $4\sqrt{2}$ C) 4 D) 6 E) 10

30. Don Retorcido ha dibujado veinte puntos en una circunferencia, todos ellos igualmente espaciados. Y se despide con esta pregunta: ¿cuántos puntos como mínimo tienes que elegir al azar para asegurarte de que cuatro de ellos serán vértices de un rectángulo?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 11 E) 16

LVI Olimpiada Matemática

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE LOCAL: segunda prueba. 14 de diciembre de 2019
Tiempo: 3h 30 min

1. El paralelogramo $ABCD$ tiene área 192. Llamamos M y N a los puntos medios de los lados AD y BC, respectivamente. La recta DN corta a la prolongación de AB en el punto P. La reccta DN corta a la prolongación de AB en el punto Q. Si CP y DQ se cortan en O, calcula el área del triángulo OPQ.

2. Consideramos la sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y para $n \geq 1$, $a_{n+2} = a_n^2 + a_{n+1}^2$.

¿Cuál es la cifra de las unidades de a_{2019}?

3. Si $\frac{2}{35} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ con $x \neq y$ enteros positivos, encuentra el menor valor posible de $x + y$.

4. Tenemos 20 tarjetas, numeradas desde el 1 hasta el 20. Jimena elige al azar una de ellas, con el número j. A continuación, Álvaro *el.ige* al azar otra tarjeta, que tiene el número a. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia $a - j$ sea al menos 2?
(Expresa el resultado en forma de fracción irreducible).

5. Si a y b son números reales diferentes, con $a \geq 0$, $b \geq 0$ y verificando $a + \sqrt{b} = b + \sqrt{a}$, ¿Cuál es el valor mayor que puede tomar la suma $a + b$?

6. ¿Cuál es el menor entero $n > 1$ tal que el producto de todos sus divisores positivos es n^4?

7. Las medidas de los lados del triángulo escaleno ABC son números enteros y su perímetro es 2019. La bisectriz de $\angle C$ corta a AB en D, con $AD = 229$. Si las medidas de AC y AD son enteros primos entre sí, calcula BC.

8. Gabriel ha olvidado el código de seguridad de su teléfono, aunque recuerda que sus cuatro cifras sumaban por lo menos 8, que la primera estaba entre 0 y 6, la segunda entre 0 y 3, la tercera entre 0 y 4 y la cuarta entre 0 y 2, siempre con los extremos incluidos. ¿Cuántos son los posibles códigos del teléfono de Gabriel?

9. Diremos que un entero positivo n es *genial* si cumple simultáneamente las condiciones siguientes: ninguna de sus cifras es 0; n es múltiplo de 11; n es múltiplo de 12 y cualquiera de los números que obtenemos al permutar las cifras de n sigue siendo múltiplo de 12. ¿Cuántos números *geniales* de diez cifras hay?

10. El área del triángulo ABC es 300. Sea Q el punto medio de BC, P un punto de AC con $CP = 3PA$, y R un punto en AB tal que el área de ΔPQR es el doble del área de ΔRBQ. Determina el área de ΔPQR.

LVI Olimpiada Matemática

LVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Prueba de selección
Comunidad de Madrid

Primera sesión, viernes tarde 17 de enero de 2020

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas.

1. Consideramos el polinomio $p(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$. Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si y solamente .si $a = b = c$.

2. El triángulo ABC es acutángulo. La altura correspondiente al vértice C corta al lado opuesto AB en el punto D. Sea Γ la circunferencia circunscrita a ΔABC, y sean t_A y t_B las tangentes a Γ en los puntos A y B respectivamente. Los puntos E y F están en las rectas t_A y t_B, respectivamente, y son tales que CE es perpendicular a t_A y CF es perpendicular a t_B. Demostrar que $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CF}{CD}$.

3. En cierta olimpiada de matemáticas, consistente en la resolución de cinco problemas, participaron varios estudiantes. Ninguno de ellos resolvió los cinco problemas, pero cada estudiante resolvió al menos dos. Se sabe además que cada par de problemas propuestos fue resuelto por dos estudiantes exactamente. Determinar el mínimo número de estudiantes que participaron en esa olimpiada.

Segunda sesión, Sábado 18 de enero de 2020
Tiempo: 3 horas

4. Ana y Bernardo juegan al siguiente juego. Se empieza con una bolsa que contiene $n \geq 1$ piedras. En turnos sucesivos y empezando por Ana, cada jugador puede hacer los siguientes movimientos: si el número de piedras en la bolsa es par, el jugador puede coger una sola piedra o la mitad de las piedras. Si el número de piedras en la bolsa es impar, tiene que coger una sola piedra. El objetivo del juego es coger la última piedra. Determinar para qué valores de n Ana tiene una estrategia ganadora.

5. Determinar para qué valores de n existe un polígono convexo de n lados cuyos ángulos internos, expresados en grados, son todos enteros, están en progresión aritmética y no son todos iguales

.

6. Sea O un punto interior del triángulo ABC y sean M, N y P las intersecciones de AO con BC, BO con CA y CO con AB, respectivamente. Demostrar que entre los seis triángulos que se forman, hay al menos dos cuya área es menor o igual que $[ABC] = 6$.
Observación: $[ABC]$ denota el área del triángulo ABC.

XXVª OLIMPIADA de MAYO
Mayo de 2019

Olimpíada de Mayo
Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

Primer Nivel

PROBLEMA 1

Hallar todos los números de dos dígitos $\overline{ab}$ que elevados al cuadrado dan un resultado donde los dos últimos dígitos son $\overline{ab}$

PROBLEMA 2

En un torneo de ajedrez participaron más de cinco competidores. Cada competidor jugó exactamente una vez contra cada uno de los otros competidores. Cinco de los competidores perdieron cada uno exactamente dos juegos. Todos los demás competidores ganaron, cada uno, exactamente tres juegos. No hubo empates en el torneo. Determinar cuantos competidores hubo y mostrar un torneo que verifique todas las condiciones.

PROBLEMA 3

Gus tiene que hacer una lista de 250 números enteros positivos, no necesariamente distintos, tal que cada número sea igual a la cantidad de números de la lista que son distintos de él. Por ejemplo, si 15 es un número de la lista entonces la lista contiene 15números distintos de 15.
Determinar la máxima cantidad de números distintos que puede contener la lista de Gus.

PROBLEMA 4

Hay que dividir un papel cuadrado en tres partes mediante dos cortes rectos, de modo que al ubicar estas partes de forma adecuada, sin huecos ni superposiciones, se forme un triángulo obtusángulo. Indicar cómo cortar el cuadrado y cómo armar el triángulo con las tres partes.
Nota. Un triángulo es obtusángulo si uno de sus ángulos mide más de 90º.

PROBLEMA 5

Se tiene un tablero de tres filas y 2019 columnas. En la primera fila están escritos los números enteros de 1 a 2019 inclusive, ordenados de menor a mayor. En la segunda fila, Ana escribe esos mismos números pero ordenados a su elección. En cada casilla de la tercera fila se escribe la diferencia entre los dos números ya escritos en su misma columna (el mayor menos el menor). Beto tiene que pintar algunos números de la tercera fila de manera que la suma de los números pintados sea igual a la suma de los números de esa fila que quedaron sin pintar. ¿Puede Ana completar la segunda fila de manera que Beto no logre su objetivo?

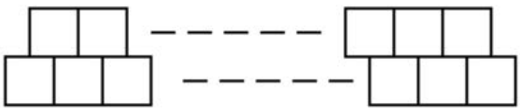
Segundo Nivel

PROBLEMA 1

Un entero positivo es *piola* si los 9 restos que se obtienen al dividirlo entre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 son todos diferentes y distintos de cero.
¿Cuántos enteros piolas hay entre 1 y 100 000?

PROBLEMA 2

Se tiene un tablero con 2020 casillas en la fila inferior y 2019 en la superior, ubicadas como se muestra en la figura.



En la fila inferior se colocan los números enteros del 1 al 2020 en algún orden. Luego en cada casilla de la fila superior se anota la multiplicación de los dos números que tiene debajo. ¿Cómo se pueden colocar los números en la fila inferior para que la suma de los números de la fila superior sea la menor posible?

PROBLEMA 3

En los lados AB, BC y CA de un triángulo ABC se ubican los puntos P, Q y R respectivamente, tales que $BQ = 2QC$, $CR = 2RA$ y $P\hat{R}Q = 90^{\circ}$. Demostrar que $A\hat{P}R = R\hat{P}Q$

PROBLEMA 4

Encontrar el menor número entero positivo N de dos o más dígitos que tiene la siguiente propiedad: Si insertamos cualquier dígito no nulo d entre cualesquiera dos dígitos adyacentes de N obtenemos un número que es múltiplo de d.

PROBLEMA 5

Consideramos los n vértices de un polígono regular de n lados. Se tiene un conjunto de triángulos con vértices en estos n puntos con la propiedad que para cada triángulo del conjunto, al menos uno de sus lados no es lado de ningún otro triángulo del conjunto. ¿Cuál es la mayor cantidad de triángulos que puede tener el conjunto?

XXVª OLIMPIADA DE MAYO 2019
RESULTADOS DE ESPAÑA

PRIMER NIVEL

	Apellidos y nombre	Premio
1	Diego López Aragón	ORO
2	Jesús Gil Arce	PLATA
3	Carlos Leather Galera	PLATA
4	Isis Lurueña Barbero	BRONCE
5	Carla Balonga Villate	BRONCE
6	Enrique Ortiz Gilarranz	BRONCE
7	Gonzalo Pajares Sánchez	BRONCE
8	Luis Blázquez Nuño	MENCIÓN
9	David Tarí Ferreiro	MENCIÓN
10	Juan Burgos Pino	MENCIÓN

SEGUNDO NIVEL

1	Niko González Vilaró	PLATA
2	Clemente Contreras	PLATA
3	Nicolás Merenciano Esteve	PLATA
4	Luis Noguera Caro	BRONCE
5	Nicolás Iserte Tarazón	BRONCE
6	Félix García Taboada	BRONCE
7	Miguel Díez Navarro	BRONCE
8	Héctor Cintado Peiró	MENCIÓN
9	Pedro Alejandro López Octavio	MENCIÓN
10	Álvaro Gamboa Rodríguez	MENCIÓN

XXIV Concurso de
Primavera de Matemáticas
2020

Comunidad
de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

ANAYA

Smartick

Mc
Graw
Hill
Education